Untersuchungen

über die

lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

der Fuchs'schen Klasse

mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen.

Inaugural-Dissertation,

genehmigt von der philosophischen Facultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

zur

Erlangung der Doctorwürde,

vorgelegt von

C. Franz.

AGAD
LUGD.BAT.
BIBL.

Halle 1898.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0157

Nachdem von Gauss[1]) die nach ihm benannte Gauss'sche oder hypergeometrische Reihe und die dieselbe definirende homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung aufgestellt worden war, knüpften sich an diese Reihe mancherlei Fragen, deren Lösung man Gauss selbst, Riemann, Jacobi und Kummer, sowie in neuerer Zeit Herrn Schwarz zu verdanken hat. Nach diesen eingehenden Untersuchungen scheinen alle Fragen von Bedeutung hinsichtlich dieser Reihe ausreichend erörtert worden zu sein, wenigstens ist dieselbe in der neuesten mathematischen Litteratur nicht mehr Gegenstand der Untersuchungen gewesen. Vielmehr wurde das Interesse der Mathematik den Ergebnissen der Fuchs'schen Theorie folgend auf die Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen gelenkt, und es entstanden so die Arbeiten von Seifert[2]): »Ueber die Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung: $(t-a)(t-b)(t-c)y^{(2)}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}t+\mathfrak{c}t^2)y'+(\mathfrak{d}+\mathfrak{e}t)y=0$« und von Schrentzel[3]): »Ueber die Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen«. Ich will ebenfalls diese Differentialgleichung meinen Betrachtungen zu Grunde legen, aber ich will dieselbe im ersten Abschnitte meiner Arbeit auf eine derartige Form bringen, dass sie gewissermassen als eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differentialgleichung erscheint. Denselben Weg schlägt Herr Heun[4]) (cf. A) ein, er kommt indessen zu seiner Normalform auf anderem Wege; auch sind seine Untersuchungen von den meinigen gänzlich verschieden, während allerdings die von ihm aufgestellte Normalform bis auf die Bezeichnung der Constanten

1) Gauss' Werke Bd. III. 2) Diss. Göttingen 1875. 3) Diss. Berlin 1893.
4) Mathem. Ann. Bd. 33 pg. 161.

mit der meinigen übereinstimmt. Die beiden erwähnten Arbeiten von Seifert und Schrentzel weichen insofern von der meinigen ab, als die Form der transformirten Differentialgleichung bei beiden eine von der meinigen verschiedene ist, und dass die Resultate von Herrn Schrentzel mit Hülfe doppelt unendlicher Reihen erzielt werden. Im Abschnitte A meiner Arbeit habe ich zunächst die gegebene Differentialgleichung auf die Form IIIa transformirt und diese auf die bisher noch nicht untersuchte Form IV gebracht. Im Abschnitte B stelle ich die Integrale von IIIa auf, die genaue Durchführung und Aufstellung der logarithmen behafteten Integrale ist neben anderem als neu und wesentlich hervorzuheben. Im Abschnitte C werden 8. 24 Integrale von IIIa aufgestellt, indem von IV ausgegangen wird; die Durchführung dieses Gegenstandes ist in seiner ganzen Ausdehnung neu. Im Abschnitte D bringe ich Anwendungen auf die hypergeometrische Differentialgleichung mit einem Nebenpunkt, auf die vollständigen elliptischen Integrale, auf die Existenz rationaler Integrale und auf die Lamé'sche Differentialgleichung und Lamé'sche Functionen. Auch die in diesem Abschnitte erzielten Resultate werden im ganzen als neu erkannt werden.

A. Transformation der Differentialgleichung und Aufstellung einer der Gauss'schen analogen Differentialgleichung.

Die zu Grunde zu legende liniare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen hat bekanntlich die Gestalt

$$\text{I} \qquad y'' + \frac{F_2(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} y' + \frac{F_4(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2} y = 0$$

wo $F_2(x)$ und $F_4(x)$ ganze rationale Functionen vom zweiten resp. vierten Grade höchstens und a_1, a_2, a_3 von einander verschieden sind. Ausserdem müssen $F_2(x)$ und $F_4(x)$ so beschaffen sein, dass sich nicht in beiden Koefficienten ein und dieselbe singuläre Stelle heraushebt. Um I auf eine der Gauss'schen Differentialgleichung analoge Gestalt zu bringen, führen wir an Stelle von x eine neue Variable ξ durch die Gleichung

$$x - a_1 = (a_2 - a_1)\xi$$

ein und gewinnen durch diese Transformation eine neue Gleichung für

y als Function von ξ, deren singuläre Stellen durch die Werte

$$\xi = 0, 1, \quad u = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1}, \infty,$$

die den $x = a_1, a_2, a_3, \infty$ entsprechen, gekennzeichnet werden. Diese neue Differentialgleichung kann natürlich durch die Transformation ihren Charakter nicht geändert haben, hat also die Form:

II. $$y'' + \frac{f_0 + f_1 x + f_2 x^2}{x(x-1)(x-u)} y' + \frac{g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + g_4 x^4}{x^2 (x-1)^2 (x-u)^2} y = 0.$$

Es bestehen nun folgende Gleichungen:

$$\rho(\rho-1) + \frac{f_0}{u}\rho + \frac{g_0}{u} = (\rho - \varkappa)(\rho - \varkappa')$$

$$\rho(\rho-1) + \frac{f_0 + f_1 + f_2}{1-u}\rho + \frac{g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{(1-u)^2} = (\rho - \lambda)(\rho - \lambda')$$

$$\rho(\rho-1) + \frac{f_0 + f_1 u + f_2 u^2}{u(u-1)}\rho + \frac{g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + g_3 u^3 + g_4 u^4}{u^2 (u-1)^2} = (\rho - \mu)(\rho - \mu')$$

$$\rho(\rho-1) + (2 - f_2)\rho + g_4 = (\rho - \nu)(\rho - \nu').$$

Man nennt diese Gleichungen, die zu den singulären Punkten 0, 1, u, ∞ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen. Wir wenden nun auf II. die Transformation $y = x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda}(x-u)^{\mu} z$ an, so erhalten wir für z eine Gleichung von der Form

IIa. $$z'' + \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{x(x-1)(x-u)} z' + \frac{b_0 + b_1 x}{x(x-1)(x-u)} z = 0$$

wie ich allgemein für eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Fuchs'schen Klasse nachweisen will[1]), Eine solche Differentialgleichung hat bekanntlich die Form:

$$y'' + \frac{F_{\sigma-1}(x)}{\psi_\sigma(x)} y' + \frac{F_{2(\sigma-1)}(x)}{\psi_\sigma^2(x)} y = 0$$

wo $\psi_\sigma(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\sigma)$ und $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ von einander verschieden sind. Wenn die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen an den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ resp.

$$\lambda_1, \lambda_1'; \lambda_2, \lambda_2'; \ldots \lambda_\sigma, \lambda_\sigma'$$

sind, so mache ich die Substitution $y = (x - a_1)^{\lambda_1} \ldots (x - a_\sigma)^{\lambda_\sigma} z$ und er-

1) Heffter: Einleit. i. d. Theor. d. lin. Differentialgleichungen, pg. 224.

halte dann für z eine Differentialgleichung von demselben Charakter, welche aber an den singulären Stellen je eine Wurzel null hat. Daher muss die Gleichung für z dieselbe Gestalt wie die für y haben und ferner muss der Zähler des Koefficienten von y durch $\psi_\sigma(x)$ teilbar sein. Mithin erhält man

$$z'' + \frac{G_{\sigma-1}(x)}{\psi_\sigma(x)} z' + \frac{G_{\sigma-2}(x)}{\psi_\sigma(x)} z = 0.$$

Für IIa ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\rho(\rho-1) + \frac{a_0}{u}\rho = \rho(\rho-\varkappa'+\varkappa)$$

$$\rho(\rho-1) + \frac{a_0+a_1+a_2}{1-u}\rho = \rho(\rho-\lambda'+\lambda)$$

$$\rho(\rho-1) + \frac{a_0+a_1u+a_2u^2}{u(u-1)}\rho = \rho(\rho-\mu'+\mu)$$

$$\rho(\rho-1) + (2-a_2)\rho + b_1 = (\rho-\varkappa-\lambda-\mu-\nu)(\rho-\varkappa-\lambda-\mu-\nu').$$

Es ist daher

$$1-\frac{a_0}{u} = \varkappa'-\varkappa, \quad 1-\frac{a_0+a_1+a_2}{1-u} = \lambda'-\lambda, \quad 1-\frac{a_0+a_1u+a_2u^2}{u(u-1)} = \mu'-\mu$$

$$a_2-1 = 2\varkappa+2\lambda+2\mu+\nu+\nu', \quad b_1 = (\varkappa+\lambda+\mu+\nu)(\varkappa+\lambda+\mu+\nu').$$

Wie man aus den ersten 4 Gleichungen sieht, ist die Summe der 8 Wurzeln gleich 2 entsprechend der Fuchs'schen Beziehung[1]) und der Koefficient b_0 bleibt nach Auswahl der Wurzeln willkürlich[2]), was ebenfalls im Einklange mit einem Satze des Herrn Fuchs steht. Es nimmt daher infolge obiger Beziehungen IIa die Gestalt an:

IIb. $$z'' + \frac{(1-\varkappa'+\varkappa)u + [(1-\lambda'+\lambda)(1-u) - (1-\varkappa'+\varkappa)u - [1+\alpha+\beta)]x + (1+\alpha+\beta)x^2}{x(x-1)(x-u)} z'$$
$$+ \frac{b_0+\alpha\beta x}{x(x-1)(x-u)} z = 0$$

wo

$$\varkappa+\lambda+\mu+\nu = \alpha, \qquad \varkappa+\lambda+\mu+\nu' = \beta$$

gesetzt ist.

In dieser Gleichung kommt die Grösse $\mu-\mu'$ nicht vor, das liegt daran, dass dieselbe sich gemäss der Gleichung

$$\mu'-\mu+\varkappa'-\varkappa+\lambda'-\lambda+\alpha+\beta = 2$$

durch die anderen Wurzeln ausdrücken lässt.

---

1) Schlesinger: Handbuch der Theor. d. lin. Differentialgleichungen, Bd. I, pg. 241.
2) Schlesinger l. c. pg. 243.

Wir wollen nun IIb so einrichten, dass sie für die Grenzfälle $u = 0$ und $u = 1$ genau in eine Gauss'sche Gleichung übergeht. Wenn wir dementsprechende Versuche machen und setzen

$$b_0 = -\alpha\beta u, \qquad \lambda - \lambda' - \alpha - \beta = -\gamma, \qquad 1 - \varkappa' + \varkappa = \gamma_1$$

so gewinnen wir folgende Differentialgleichung:

$$\text{III.} \quad z'' + \frac{\gamma_1 u + [-\gamma - (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u]x + (1 + \alpha + \beta)x^2}{x(x-1)(x-u)} z' + \frac{\alpha\beta(x-u)}{x(x-1)(x-u)} z = 0,$$

welche für $u = 0$ resp. $u = 1$ in die Gauss'sche Gleichung

$$z'' + \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)x}{x(x-1)} z' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} z = 0$$

resp. in die Gleichung

$$z'' + \frac{-\gamma_1 + (1 + \alpha + \beta)x}{x(x-1)} z' + \frac{\alpha\beta}{(x(x-1)} z = 0$$

übergeht. Es ist noch zu bemerken, dass wenn wir $\gamma_1 = \gamma$ in III. setzen, wir ebenfalls die Gauss'sche Gleichung erhalten, welchen Wert auch u haben möge. In III. ist das einzig Willkürliche die Festsetzung der Grösse $b_0 = -\alpha\beta u$. Um den allgemeinen Fall zu erhalten, müssen wir $b_0 = -\alpha\beta q$ setzen, wo q eine völlig willkürliche Grösse ist. Wir gewinnen dadurch folgende Gleichung:

$$\text{IIIa.} \quad z'' + \frac{\gamma_1 u + [-\gamma - (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u]x + (1 + \alpha + \beta)x^2}{x(x-1)(x-u)} z' + \frac{\alpha\beta(x-q)}{x(x-1)(x-u)} z = 0.$$

Diese Gleichung geht aus der allgemeinen Gleichung IIa resp. II. hervor, wenn man

$$a_0 = (1 - \varkappa' + \varkappa)u = \gamma_1 u;$$
$$a_1 = (1 - \lambda' + \lambda)(1-u) - (1 - \varkappa' + \varkappa)u - (1 + \alpha + \beta) = -\gamma - (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u;$$
$$a_2 = 1 + \alpha + \beta; \qquad b_0 = -\alpha\beta q; \qquad b_1 = \alpha\beta$$

setzt.

Dieselbe stimmt bis auf die Constanten mit einer Gleichung überein, welche Herr Heun in den Mathem. Annalen, Bd. 33, pg. 161 auf anderem Wege gefunden hat. Er geht dabei aus von Riemann'schen Functionen 2 Ordnung mit 4 Verzweigungspunkten, welche dreifach verknüpft sind und welche im wesentlichen durch die Gleichung

$$x(x-1)(x-a)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x^2 - \{\alpha + \beta + a\gamma + (a-1)\delta + 1\}x + a\gamma]y' + \alpha\beta(x-q)y = 0$$

definirt werden. Diese Gleichung geht aus IIb hervor, wenn man

$$u = a, \qquad 1-\varkappa'+\varkappa = \gamma, \qquad 1-\lambda'+\lambda = \delta$$

setzt. Ich will meinen weiteren Untersuchungen die Gleichung IIIa zu Grunde legen, derselben aber zum Schluss noch eine Gestalt geben, die symmetrischer ist und zuerst allgemein von Herrn Klein[1]) aufgestellt wurde. Er lässt sich IIIa in folgender Form schreiben:

$$z''+\left[+\frac{\gamma_1}{x}+\frac{-\gamma+1+\alpha+\beta}{x-1}+\frac{\gamma-\gamma_1}{x-u}\right]z'+(\alpha\beta x-\alpha\beta q)\frac{z}{x(x-1)(x-u)} = 0$$

$$z''+\left[\frac{1-\varkappa'+\varkappa}{x}+\frac{1-\lambda'+\lambda}{x-1}+\frac{1-\mu'+\mu}{x-u}\right]z'+(\alpha\beta x-\alpha\beta q)\frac{z}{x(x-1)(x-u)} = 0.$$

Auf diese Gleichung wende ich die Transformation

$$y = x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda}(x-u)^{\mu}z$$

an und erhalte dadurch für y folgende Gleichung:

IV.
$$y''+\left\{\frac{1-\varkappa'-\varkappa}{x}+\frac{1-\lambda'-\lambda}{x-1}+\frac{1-\mu'-\mu}{x-u}\right\}y'$$
$$+\left\{\frac{\varkappa\varkappa' u}{x}+\frac{\lambda\lambda'(1-u)}{x-1}+\frac{\mu\mu' u(u-1)}{x-u}+\nu\nu' x+r\right\}\frac{y}{x(x-1)(x-u)} = 0$$

wo

$$r = \varkappa+\mu-\varkappa\mu'-\mu\varkappa'-\varkappa\varkappa'+\lambda\lambda'-\mu\mu'+(\varkappa+\lambda-\varkappa\lambda'-\varkappa'\lambda-\varkappa\varkappa'-\lambda\lambda'+\mu\mu')u-\alpha\beta q.$$

$\varkappa$, $\varkappa'$, λ, λ', μ, μ', ν, ν', zwischen denen die Relation

$$\varkappa+\varkappa'+\lambda+\lambda'+\mu+\mu'+\nu+\nu' = 2$$

besteht, sind die Wurzeln der für die Punkte $x = 0, 1, u, \infty$ gültigen determinirenden Fundamentalgleichungen. Wegen ihrer Symmetrie wird Gleichung IV. später bei Aufstellung der Integrale von grosser Wichtigkeit sein. Wir werden durch dieselbe in den Stand gesetzt $8 \cdot 24 = 192$ Integrale aufzustellen, welche zum Teil den 24 Gauss'schen Integralen entsprechen.

B. Integration der Differentialgleichung.

Die Wurzeln der zu den Punkten $0, 1, u, \infty$ gehörigen Fundamentalgleichungen von IIIa ergeben sich resp. zu $0, 1-\gamma_1$; $0, \gamma-\alpha-\beta$ $0, 1-\gamma+\gamma_1$; α, β. Um die Recursionsformel für eine IIIa befriedigende Reihe

1) Klein: Hypergeometr. Functionen, pg. 210.

$$g(x,\rho) = \sum_0^\infty {}_\nu g_\nu(\rho) x^{\rho+\nu}$$

zu gewinnen, bilden wir die charakteristische Function und erhalten

1) $$f_0(\rho+\nu)g_\nu(\rho)+f_1(\rho+\nu-1)g_{\nu-1}(\rho)+f_2(\rho+\nu-2)g_{\nu-2}(\rho) = 0$$

oder

$$a_{\nu\nu}(\rho)g_\nu(\rho)+a_{\nu,\nu-1}(\rho)g_{\nu-1}(\rho)+a_{\nu,\nu-2}(\rho)g_{\nu-2}(\rho) = 0,$$

wo

$$f_0(\rho+\nu) = a_{\nu\nu}(\rho) = u(\rho+\nu)(\rho+\nu-1+\gamma_1)$$
$$f_1(\rho+\nu-1) = a_{\nu,\nu-1}(\rho) = -(u+1)(\rho+\nu-1-\delta)(\rho+\nu-1-\varepsilon);$$
$$f_1(\rho) = a_{10}(\rho) = -(u+1)\rho(\rho-1)-(\gamma+(\gamma_1-\gamma+1+\alpha+\beta)u)\rho-q\alpha\beta$$
$$f_2(\rho+\nu-2) = a_{\nu,\nu-2}(\rho) = (\rho+\nu-2+\alpha)(\rho+\nu-2+\beta),$$
$$\delta\varepsilon = \frac{q\alpha\beta}{u+1}, \qquad \delta+\varepsilon = \frac{-\gamma+1-(\gamma_1-\gamma+\alpha+\beta)u}{u+1}$$

ist. Der Algorithmus für $g(x,\rho)$ lautet demnach für unbestimmtes ρ

$$g(x,\rho) = g_0(\rho)x^\rho \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\Delta^{(\nu)}(\rho)}{a_{11}(\rho)a_{22}(\rho)\dots a_{\nu\nu}(\rho)}$$
$$= x^\rho \Phi\left(\begin{matrix} u & \rho-0,\ \rho-1+\gamma_1 \\ -(u+1);\ \rho-\delta,\ \rho-\varepsilon; & x \\ 1 & \rho+\alpha,\ \rho+\beta \end{matrix}\right)$$

wo

$$\Delta^{(\nu)}(\rho) = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{10}(\rho)a_{11}(\rho) & & & & \\ a_{20}(\rho)a_{21}(\rho)a_{22}(\rho) & & & & \\ a_{31}(\rho)a_{32}(\rho)a_{33}(\rho) & & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & \\ a_{\nu-1,\nu-3}(\rho)a_{\nu-1,\nu-2}(\rho)a_{\nu-1,\nu-1}(\rho) \\ a_{\nu,\nu-2}(\rho)a_{\nu,\nu-1}\quad(\rho) \end{vmatrix}$$

und die leeren Stellen in dieser Determinante mit Nullen auszufüllen sind. Es empfiehlt sich den Algorithmus für die Reihe $g(x,\rho)$ in der zweiten der unter 2) angegebenen Formen zu schreiben, weil aus ihr der Algorithmus für die nach fallenden Potenzen fortschreitende Reihe

3) $$g_1\left(\frac{1}{x},\rho\right) = \sum_0^\infty {}_\nu g_{-\nu}(\rho)x^{\rho-\nu} = g_{-0}(\rho)x^\rho \Sigma \frac{\Delta'^{(\nu)}(\rho)}{a'_{11}(\rho)\dots a'_{\nu\nu}(\rho)}$$

gebildet werden kann. Derselbe ergiebt sich in der Form[1])

3′) $$g_1\left(\frac{1}{x},\rho\right) = x^\rho \Phi\left(\begin{matrix} 1 & -\rho-\alpha,\ -\rho-\beta \\ -(u+1);\ -\rho+\delta,\ -\rho+\varepsilon; & \frac{1}{x} \\ u & -\rho+0,\ -\rho+1-\gamma_1 \end{matrix}\right).$$

---

1) Schlesinger: l. c. pg. 226; Heffter: l. c. pg. 217.

Dass man auf diese Weise $g_1\left(\frac{1}{x}, \rho\right)$ aus $g(x, \rho)$ gewinnen kann, dafür will ich einen Beweis geben, der überhaupt auf Differentialgleichungen mit rationalen Koefficienten angewandt werden kann. Die Formel 1)

$$u(\rho+\nu)(\rho+\nu-1+\gamma_1)g_\nu(\rho)-(u+1)(\rho+\nu-1-\delta)(\rho+\nu-1-\varepsilon)g_{\nu-1}(\rho)$$
$$+(\rho+\nu-2+\alpha)(\rho+\nu-2+\beta)g_{\nu-2}(\rho) = 0$$

gilt für je drei auf einander folgende Glieder einer beliebigen IIIa genügenden Reihe. Wenn nun eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe vorliegt, so hat die Recursionsformel auch die Gestalt:

$$f_0(\rho-\nu)g_{-\nu}(\rho)+f_1(\rho-\nu-1)g_{-\nu-1}(\rho)+f_2(\rho-\nu-2)g_{-\nu-2}(\rho) = 0$$
$$f_0(\rho-\nu+2)g_{-\nu+2}(\rho)+f_1(\rho-\nu+1)g_{-\nu+1}(\rho)+f_2(\rho-\nu)g_{-\nu}(\rho) = 0$$
$$(\rho-\nu+\alpha)(\rho-\nu+\beta)g_{-\nu}(\rho)-(u+1)(\rho-\nu+1-\delta)(\rho-\nu+1-\varepsilon)g_{-\nu+1}(\rho)$$
$$+u(\rho-\nu+2)(\rho-\nu+1+\gamma_1)g_{-\nu+2}(\rho) = 0,$$

welche übergeht in

1′) $$(-\rho+\nu-\alpha)(-\rho+\nu-\beta)g_{-\nu}(\rho)-(u+1)(-\rho+\nu-1+\delta)(-\rho+\nu-1+\varepsilon)g_{-\nu+1}(\rho)$$
$$+u(-\rho+\nu-2)(-\rho+\nu-1-\gamma_1)g_{-\nu+2}(\rho) = 0.$$

Setze ich an Stelle von x^ϱ, $\left(\frac{1}{x}\right)^\varrho$, so geht diese Formel über in

$$(\rho+\nu-\alpha)(\rho+\nu-\beta)g_{-\nu}(\rho)-(u+1)(\rho+\nu-1+\delta)(\rho+\nu-1+\varepsilon)g_{-\nu+1}(\rho)$$
$$+u(\rho+\nu-2)(\rho+\nu-1-\gamma_1)g_{-\nu+2}(\rho) = 0$$
$$a'_{\nu\nu}(\rho)g_{-\nu}(\rho)+a'_{\nu,\nu-1}(\rho)g_{-\nu+1}(\rho)+a'_{\nu,\nu-2}(\rho)g_{-\nu+2}(\rho) = 0.$$

Die Gleichung 1′) beweist durch Vergleich mit 1), dass $g_1\left(\frac{1}{x}, \rho\right)$ durch den Algorithmus 3′) dargestellt wird.

§ 1. Es seien $1-\gamma_1$, $\alpha-\beta$ keine ganze Zahlen. Es ergeben sich dann für die zu den Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme folgende Werte:

4) $$y_{01} = \Phi\begin{pmatrix} u & 0, -1+\gamma_1 \\ -(u+1); & -\delta, -\varepsilon; \quad x \\ 1 & \alpha, \beta \end{pmatrix} = P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x).$$

5) $$y_{02} = x^{1-\gamma_1}\Phi\begin{pmatrix} u & 1-\gamma_1, 0 \\ -(u+1); & 1-\gamma_1-\delta, 1-\gamma_1-\varepsilon; \quad x \\ 1 & \alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \end{pmatrix}$$
$$= x^{1-\gamma_1}P(\alpha+1-\gamma_1, \beta+1-\gamma_1, \gamma+2(1-\gamma_1), 2-\gamma_1; u, q; x).$$

6) $$\overset{\infty}{y}_{01} = x^{-\alpha}\Phi\left(\begin{matrix} 1 & 0,\ \alpha-\beta \\ -(u+1); & \alpha+\delta,\ \alpha+\varepsilon; \\ u & \alpha,\ \alpha+1-\gamma_1 \end{matrix}\ \frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{-\alpha}P\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta,\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right).$$

Aus 6) erhalten wir eine Gleichung 7) für y_{02} durch Vertauschung von α und β.

Infolge der durch die erste dieser Gleichungen angegebenen Beziehung zwischen Φ und P und auf Grund der unter 1) angegebenen Beziehungen zwischen δ und ε kann man von der linken Seite dieser Gleichungen einen Schluss auf die rechte machen. Der Parameter q ist in den Gleichungen veränderlich und man findet

in 5) $$q = \frac{(u+1)(\delta-1+\gamma_1)(\varepsilon-1+\gamma_1)}{(\alpha+1-\gamma_1)(\beta+1-\gamma_1)},$$

in 6) $$q = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\varepsilon)(u+1)}{u\alpha(\alpha+1-\gamma_1)},$$

woraus hervorgeht, dass q lineare Transformation erleidet. Die in 5), 6), 7) an die Stelle von α, β, γ, γ_1 tretenden Grössen kann man leicht aus den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen derjenigen Differentialgleichungen berechnen, welche aus IIIa durch die Transformationen $y = x^{1-\gamma_1}y_1$, $y = x^{-\alpha}y'$, $y = x^{-\beta}y'$ resp. entstehen. y_1 ist als Function von x, y' als Function von $\frac{1}{x}$ aufzufassen.

§ 2. Das kanonische Fundamentalsystem für die Stelle $x = 1$ ergiebt sich, wenn wir $1-x = \xi$ setzen. Dadurch geht IIIa in eine andere ähnliche über, in welcher an Stelle von α, β, γ, γ_1; u, q getreten sind α, β, $1+\alpha+\beta-\gamma_1$, $1+\alpha+\beta-\gamma$; $1-u$, $1-q$; die letzte Grösse bezeichnen wir wieder mit q.

8) $$y_{11} = P(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x).$$

Aus 8) erhalten wir ebenso wie unter § 1 entsprechende Gleichungen 9), 10), 11).

Die jetzigen q ergeben sich aus denen unter § 1, wenn man an Stelle von α, β, γ, γ_1; u, q die entsprechenden Werte setzt. $\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha-\beta$ sollen auch hier keine ganze Zahlen sein.

§ 3. Das kanonische Fundamentalsystem für $x = u$ erhalten wir, indem $x-u = -u\xi$ setzen. Es ergiebt sich dann eine Differentialglei-

chung, in welcher an die Stelle der 6 Parameter der ursprünglichen Differentialgleichung die Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1,\ \frac{u-1}{u},\ \frac{u-q}{u}$$

getreten sind. Für die letzte Grösse wollen wir wieder allgemein q setzen.

12) $$y_{u1} = P\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ q;\ \frac{x-u}{-u}\right).$$

Aus 12) erhalten wir weitere drei Gleichungen 13), 14), 15) wie vorher.

Die q ergeben sich wie vorher aus dem anfänglichen q, was für $\frac{u-q}{u}$ gesetzt. Es ist vorausgesetzt, dass $1-\gamma+\gamma_1$ und $\alpha-\beta$ keine ganzen Zahlen sind. Was die Convergenz der Reihen 4—15 anbetrifft, so convergiren nach dem Fundamentaltheorem des Herrn Fuchs die nach positiven Potenzen fortschreitenden Reihen innerhalb eines Kreises, der bis zu dem nächsten singulären Punkte reicht, die nach negativen Potenzen fortschreitenden Reihen aber ausserhalb des Kreises, der durch den entferntesten singulären Punkt geht. Die Mittelpunkte der Convergenzkreise sind hierbei die singulären Punkte, für deren Umgebung die Reihenentwicklungen gelten, und aus diesen ergiebt sich je nach der Lage des nächsten resp. entferntesten singulären Punktes die Grösse des Convergenzkreises. Was die Convergenz auf dem Convergenzkreise anbetrifft, so will ich dabei auf die Arbeit von Herrn Heun[1]) verweisen. Es ergiebt sich daraus auf Grund des Convergenzkriteriums von Weierstrass[2]):

$$\Re(\alpha+\beta-1-\gamma)<-1, \quad \text{wenn} \quad |u|>1 \quad \text{ist.}$$
$$\Re(\gamma-\gamma_1-2)<-1, \quad \text{wenn} \quad |u|<1 \quad \text{ist.}$$

Im ersten Falle convergirt die Function P für alle Werte, für welche $|x|=1$, im zweiten Falle für alle Werte, für welche $|x|=|u|$ ist. $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma_1;\ u,\ q;\ u)$ hat einen bestimmten Wert, wenn $|u|>1$ und $\Re(\alpha+\beta-1-\gamma)<0$ ist. Andrerseits hat $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma_1;\ u,\ q;\ 1)$ einen bestimmten Wert, wenn $|u|<1$ und $\Re(\gamma-\gamma_1-2)<0$ ist. Im Anschluss hieran will ich die analytische Darstellung der Function $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma_1;\ u,\ q;\ x)$ geben, weil sie für unsere ganze Arbeit von grundlegender Bedeutung ist:

---

1) cf. l. c. 2) Weierstrass: Abhandl. a. d. Functionenlehre, pg. 220.

4a)
$$y_{01} = P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q, x) = 1 + \frac{(u+1)\delta\varepsilon}{u \, . \, 1 \, . \, \gamma_1} x + \frac{\left((u+1)(1-\delta)(1-\varepsilon) - \frac{u \, . \, 1 \, . \, \gamma, \alpha, \beta}{(u+1)\delta\varepsilon}\right)(u+1)\delta\varepsilon}{u^2 \, . \, 1 \, . \, 2 \, . \, \gamma_1(\gamma_1+1)} x^2$$
$$+ \frac{\left((u+1)(2-\delta)(2-\varepsilon) - \frac{u \, . \, 2(\gamma_1+1)(\alpha+1)(\beta+1)}{(u+1)(1-\delta)(1-\varepsilon) - \frac{u \, . \, 1 \, . \, \gamma, \alpha, \beta}{(u+1)\delta\varepsilon}}\right)\left((u+1)(1-\delta)(1-\varepsilon) - \frac{u \, . \, 1 \, . \, \gamma_1 \alpha\beta}{(u+1)\delta\varepsilon}\right)(u+1)\delta\varepsilon}{u^3 \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, \gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)} x^3 + \cdots$$

Das Gesetz dieser Reihe ist unmittelbar zu ersehen und ergiebt sich aus folgender Ueberlegung.

16)
$$\Delta^{(\nu+1)}(\rho) = -a_{\nu+1,\nu}(\rho)\,\Delta^{(\nu)}(\rho) - a_{\nu\nu}(\rho)\,a_{\nu+1,\nu-1}(\rho)\,\Delta^{(\nu-1)}(\rho)$$

17)
$$\frac{g_{\nu+1}(\rho)}{g_\nu(\rho)} = \frac{1}{a_{\nu+1,\nu+1}(\rho)} \frac{\Delta^{(\nu+1)}(\rho)}{\Delta^{(\nu)}(\rho)}$$
$$= \frac{1}{a_{\nu+1,\nu+1}(\rho)} \left\{ -a_{\nu+1,\nu}(\rho) - \frac{a_{\nu\nu}(\rho)\,a_{\nu+1,\nu-1}(\rho)}{-a_{\nu,\nu-1}(\rho) - \frac{a_{\nu-1,\nu-1}(\rho)\,a_{\nu,\nu-2}(\rho)}{\ddots \; -a_{32}(\rho) - \frac{a_{22}(\rho)\,a_{31}(\rho)}{-a_{21}(\rho) - \frac{a_{11}(\rho)\,a_{20}(\rho)}{-a_{10}(\rho)}}}} \right\}$$
$$= \frac{1}{u(\rho+\nu+1)(\rho+\nu+\gamma_1)} \left\{ (u+1)(\rho+\nu-\delta)(\rho+\nu-\varepsilon) - \frac{u(\rho+\nu)(\rho+\nu-1+\gamma_1)(\rho+\nu-1+\alpha)(\rho+\nu-1+\beta)}{(u+1)(\rho+\nu-1-\delta)(\rho+\nu-1-\varepsilon) - \frac{u(\rho+\nu-1)(\rho+\nu-2+\gamma_1)(\rho+\nu-2+\alpha)(\rho+\nu-2+\beta)}{\ddots \; (u+1)(\rho+1-\delta)(\rho+1-\varepsilon) - \frac{u(\rho+1)(\rho+\gamma_1)(\rho+\alpha)(\rho+\beta)}{(u+1)(\rho-\delta)(\rho-\varepsilon)}}} \right\}$$

Es ist andrerseits auf Grund von (16)

4b)
$$P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x) = 1 + \frac{\alpha\beta q}{u \, . \, 1 \, . \, \gamma_1} x + \frac{(\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u + q\alpha\beta)q\alpha\beta - u \, . \, 1 \, . \, \gamma_1 \alpha\beta}{u^2 \, . \, 1 \, . \, 2 \, . \, \gamma_1(\gamma_1+1)} x^2$$
$$+ \frac{((u+1)2 + 2(\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u) + q\alpha\beta)((\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u + q\alpha\beta)q\alpha\beta - u.1.\gamma_1\alpha\beta) - u \, . \, 2(\gamma_1+1)(\alpha+1)(\beta+1)\alpha\beta q}{u^3 \, . \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, \gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\{(u+1)(n-1)(n-2) + (\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u)(n-1) + q\alpha\beta\}\,\Delta^{(n-1)}_{\varrho=0}(\rho) - u(n-1)(n-2+\gamma_1)(n-2+\alpha)(n-2+\beta)\,\Delta^{(n-2)}_{\varrho=0}(\rho)}{u^n \, . \, n! \, \gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1+n-1)} x + \cdots$$

Ich will nunmehr die unter § 1 bis § 3 gemachten, beschränkenden Voraussetzungen fallen lassen und annehmen, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen ganzzahlig verschieden seien.

§ 1a. Wenn $1-\gamma_1$ resp. $\alpha-\beta$ ganze Zahlen sind, so können die Elemente der zu $x=0$ resp. $x=\infty$ gehörigen Fundamentalsysteme Logarithmen enthalten. Nennen wir nämlich y_1 und y_2 die Elemente eines Fundamentalsystems für $x=0$, so muss eins derselben y_1 immer in Reihenform auftreten, während das andere die Gestalt hat:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{x^{-\gamma_1}(x-1)^{\gamma-1-\alpha-\beta}(x-u)^{\gamma_1-\gamma}}{y_1^2} dx$$

da

$$p = \frac{\gamma_1 u + (-\gamma-(\gamma_1-\gamma+1+\alpha+\beta)u)x + (1+\alpha+\beta)x^2}{x(x-1)(x-u)}$$

$$= \frac{\gamma_1}{x} + \frac{-\gamma+1+\alpha+\beta}{x-1} + \frac{\gamma_1-\gamma}{x-u}$$

ist. Hieraus ist ersichtlich, dass y_2 im allgemeinen Logarithmen enthält, ja in dem Falle $\gamma_1 = 1$ sicher mit einem Logarithmus behaftet ist. Seien ferner $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ die Elemente des Fundamentalsystems für $x=\infty$ und möge, falls $\alpha-\beta$ eine ganze Zahl ist, $\bar{y}_1$ in Reihenform entwickelbar sein, so ist

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 \int \frac{x^{-1-\alpha-\beta} F\left(\frac{1}{x}\right)}{\bar{y}_1^2} dx$$

woraus ebenfalls hervorgeht, dass im allgemeinen Logarithmen auftreten, und dass im Falle $\alpha=\beta$ sicher ein Logarithmus auftritt.

Wir könnten auf diese Weise durch Integration y_2 und $\bar{y}_2$ darstellen, indem wir die Integranden nach Potenzen von x resp. $\frac{1}{x}$ entwickeln und dann jedes einzelne Glied der Reihe integriren. Indessen ist die Entwicklung nach Potenzen von x resp. $\frac{1}{x}$ mit grossen rechnerischen Schwierigkeiten verbunden, und daher ist es rathsamer für die Entwicklung der mit Logarithmen behafteten Integrale eine andere Methode anzuwenden.

Bevor wir auf diese Methode eingehen, wollen wir die notwendige und hinreichende Bedingung dafür entwickeln, dass zu beiden Wurzeln der zu $x=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung eine Reihe gehört. Allgemeine Untersuchungen über diese Frage für eine

beliebige lineare Differentialgleichung haben Herr Fuchs[1]), Herr Frobenius[2]) und Herr Hefftер[3]) angestellt. Die Untersuchungen der beiden ersten Herren kommen darauf hinaus, mit Hilfe des Ranges des durch die Recursionsformel gegebene Gleichungssystems das Problem zu lösen. Herr Hefftер ersetzt successive das gegebene Gleichungssystem durch einfachere äquivalente Gleichungssysteme. Für unsere Zwecke ist es nicht notwendig, so allgemeine Untersuchungen zu Hilfe zu nehmen, vielmehr gelingt es ohne weiteres, wenn wir mit ν_0 und ν_1, $\nu_0 < \nu_1$ in Bezug auf die realen Teile, die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen bezeichnen, aus dem sich ergebenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{10}(\nu_0)g_0 + a_{11}(\nu_0)g_1 &= 0\\
a_{20}(\nu_0)g_1 + a_{21}(\nu_0)g_1 + a_{22}(\nu_0)g_2 &= 0\\
a_{31}(\nu_0)g_1 + a_{32}(\nu_0)g_2 + a_{33}(\nu_0)g_3 &= 0\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\\
a_{\nu_1-\nu_0,\nu_1-\nu_0-2}(\nu_0)g_{\nu_1-\nu_0-2} + a_{\nu_1-\nu_0,\nu_1-\nu_0-1}(\nu_0)g_{\nu_1-\nu_0-1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
a_{10}(\nu_0) & a_{11}(\nu_0) & & & \\
a_{20}(\nu_0) & a_{21}(\nu_0) & a_{22}(\nu_0) & & \\
 & a_{31}(\nu_0) & a_{32}(\nu_0) & a_{33}(\nu_0) & \\
 & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
 & & & a_{\nu_1-\nu_0,\nu_1-\nu_0-2}(\nu_0) & a_{\nu_1-\nu_0,\nu_1-\nu_0-1}(\nu_0)
\end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta^{(\nu_1-\nu_0)}(\nu_0) = 0 \tag{18}$$

als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer zu ν_0 gehörigen Reihe zu erkennen. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $u \neq 0$ ist, da sonst alle $a_{\lambda\lambda}(\rho) = 0$ wären, und daher das Gleichungssystem ein ganz anderes, nämlich das der Gauss'schen Reihe würde. Wenn nämlich ein System von $\nu_1 - \nu_0$ linearen homogenen Gleichungen mit ebenso viel Unbekannten durch nicht sämtlich verschwindende Werte der Unbekannten erfüllt werden soll, so muss die Determinante des Gleichungssystems verschwinden. Wenn aber umgekehrt $\Delta^{(\nu_1-\nu_0)}(\nu_0) = 0$ ist, so muss $g_0 \neq 0$ sein, denn wenn $g_0 = 0$ wäre, so würden $g_1, g_2, \ldots g_{\nu_1-\nu_0-1}$ sämtlich verschwinden, da $a_{11}(\nu_0)$, $a_{22}(\nu_0), \ldots a_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_1-\nu_0-1}(\nu_0) \neq 0$ sind. Dies ist aber dem Satze zuwider, dass wenn die Determinante eines Gleichungssystems Null ist, dasselbe mindestens durch ein System

1) Crelle's Journal, Bd. 68, pg. 375 ff. 2) ibid. Bd. 76, pg. 224 ff. 3) l. c. pg. 20—32.

von nicht sämtlich verschwindenden Werten der Unbekannten befriedigt wird.

Ebenso verhält es sich mit dem Fundamentalsystem für $x = \bar{\infty}$. Wenn α und β, $\beta > \alpha$ in Bezug auf die realen Teile, die beiden ganzzahlig differirenden Wurzeln sind, so ist

$$\begin{vmatrix} a'_{10}(\alpha)\ a'_{11}(\alpha) & & & \\ a'_{20}(\alpha)\ a'_{21}(\alpha)\ a'_{22}(\alpha) & & & \\ a'_{31}(\alpha)\ a'_{32}(\alpha)\ a'_{33}(\alpha) & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a'_{\beta-\alpha,\beta-\alpha-2}(\alpha)\ a'_{\beta-\alpha,\beta-\alpha-1}(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\Delta'^{(\beta-\alpha)}(\alpha) = 0 \tag{19}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zu α eine Reihe gehört. Die Bildung der einzelnen Elemente obiger Determinante folgt aus 1′). Es ergiebt sich demnach für IIIa. und die Stelle $x = 0$

$$\Delta^{(1-\gamma_1)}(0) = 0 \text{ resp. } \Delta^{(\gamma_1-1)}(1-\gamma_1) = 0 \tag{19a.}$$

je nachdem $1-\gamma_1 \lesseqgtr 0$ ist. Für $x = \infty$ ergiebt sich

$$\Delta'^{(\beta-\alpha)}(\alpha) = 0 \text{ resp. } \Delta'^{(\alpha=\beta)}(\beta) = 0 \tag{19b.}$$

je nachdem $\beta \lesseqgtr \alpha$ in Bezug auf den realen Teil ist. Man findet die betreffenden Integrale aus der Recursionsformel, indem man in den Werten für die Koefficienten im Zähler und Nenner die verschwindenden Glieder weglässt.

Indem wir nunmehr voraussetzen, dass keine von den Determinanten 19a.) und 19b.) verschwinden, wollen wir die Darstellung der mit Logarithmen behafteten Integrale des kanonischen Fundamentalsystems für $x = 0$ geben.

α) $1-\gamma_1 \lesseqgtr 0$

$$y_{01} = P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1;\ u, q;\ x), \qquad y_{02} = x^{1-\gamma_1}(\varphi_{00}(x) + \varphi_{01}(x)\log x)$$

so lauten nach der Fuchs'schen Theorie die Integrale für $x = 0$. $x^{1-\gamma_1}\varphi_{01}(x)$ muss für sich IIIa. genügen, wie durch Einsetzen von y_{02} in IIIa. folgt. Es muss daher $x^{1-\gamma_1}\varphi_{01}(x)$ bis auf eine Constante mit $P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1;\ u, q;\ x)$ übereinstimmen. Ausserdem darf $\varphi_{00}(x)$ für $x = 0$ nicht verschwinden, wenn $1-\gamma_1 < 0$ ist, weil $\varphi_{01}(x)$ für $x = 0$ verschwindet und y_{02} zum Exponenten $1-\gamma_1$ gehören soll. Wenn $1-\gamma_1 = 0$ ist, so darf aus demselben Grunde $\varphi_{00}(x)$ nicht unendlich für $x = 0$ werden.

Es ist also

$$y_{02} = x^{1-\gamma_1}\psi(x) + cP(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x)\log x; \quad \psi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_k a_k x^k.$$

Durch Einsetzen von y_{02} in die Differentialgleichung erhalten wir eine Recursionsformel für die a_k. Diese Methode hat Herr Seifert[1]) in seiner Dissertation angewandt. Ich will eine andere von Herrn Frobenius[2]) herrührende Methode zur Gewinnung der Integrale befolgen.

Ich setze in den Algorithmus 3) für $g_0(\rho)$ den Wert

$$g_0(\rho) = a_{11}(\rho)\, a_{22}(\rho) \ldots a_{\gamma_1-1,\gamma_1-1}(\rho)\, C(\rho),$$

wo $C(\rho)$ eine für $\rho = 1-\gamma_1$ endlich bleibende, aber sonst willkürliche Grösse bedeutet. Wir wählen $C(\rho) = \dfrac{1}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(\rho)}$, weil $\Delta^{(\gamma_1-1)}(1-\gamma_1)$ nach unserer Voraussetzung von Null verschieden sein muss. Es ist daher

$$g_0(\rho) = \frac{u^{\gamma_1-1}(\rho+1)\ldots(\rho+\gamma_1-1)(\rho+\gamma_1)\ldots(\rho+2\gamma_1-2)}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(\rho)}.$$

Es genügt nun $g(x, \rho)$, wenn wir die linke Seite von IIIa. mit $P(y)$ bezeichnen, der Gleichung

$$P(g(x,\rho)) = g_0(\rho) f_0(\rho) x^\varrho = \frac{u^{\gamma_1}\rho(\rho+1)\ldots(\rho+\gamma_1-1)^2(\rho+\gamma_1)\ldots(\rho+2\gamma_1-2)}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(\rho)} x^\varrho.$$

Daher ist

$$P(g'(x,\rho)) = \frac{\partial}{\partial\rho}(g_0(\rho) f_0(\rho) x^\varrho)$$

wo

$$g'(x,\rho) = \frac{\partial}{\partial\rho} g(x,\rho)$$

gesetzt ist. Da $g_0(\rho) f_0(\rho) x^\varrho$ den Factor $(\rho+\gamma_1-1)^2$ enthält, so verschwindet der Ausdruck selbst nebst seiner ersten Ableitung nach ρ für $\rho = 1-\gamma_1$, und wir erhalten daher das kanonische Fundamentalsystem in der Form

$$y_{01} = g(x, 1-\gamma_1) = \{g_0(\rho) x^\varrho \sum_{0}^{\infty}{}_\nu c_\nu(\rho) x^\nu\}_{\varrho=1-\gamma_1}$$

$$y_{02} = \left\{\frac{\partial}{\partial\rho} g(x,\rho)\right\}_{\varrho=1-\gamma_1}$$

wo

$$c_\nu(\rho) = \frac{\Delta^{(\nu)}(\rho)}{a_{11}(\rho)\ldots a_{\nu\nu}(\rho)} = \frac{\Delta^{(\nu)}(\rho)}{u^\nu(\rho+1)\ldots(\rho+\nu)(\rho+\gamma_1)\ldots(\rho+\nu-1+\gamma_1)}$$

zu setzen ist. Es ist nun

$$c_{\gamma_1-1+\nu} g_0(\rho) = \frac{\Delta^{(\gamma_1-1+\nu)}(\rho)}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(\rho)} \frac{1}{a_{\gamma_1\gamma_1}(\rho)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(\rho)}$$

1) cf. Einleitung.

2) Crelles Journal, Bd. 75, pg. 221 ff.

und, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\frac{\Delta^{(\gamma_1-1+\nu)}(\rho)}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(\rho)} = \alpha_\nu(\rho)$$

$$g(x,\rho) = g_0(\rho)x^\rho\sum_{0\,\nu}^{\gamma_1-2}c_\nu(\rho)x^\nu + x^\rho\sum_{0\,\nu}^{\infty}\frac{\alpha_\nu(\rho)}{a_{\gamma_1\gamma_1}(\rho)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(\rho)}x^{\nu+\gamma_1-1}$$

$$g'(x,\rho) = g(x,\rho)\log x + g_0(\rho)x^\rho\sum_{0\,\nu}^{\gamma_1-2}c'_\nu(\rho)x^\nu$$

$$+g'_0(\rho)x^\rho\sum_{0\,\nu}^{\gamma_1-2}c_\nu(\rho)x^\nu + x^\rho\sum_{0\,\nu}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\alpha_\nu(\rho)}{a_{\gamma_1\gamma_1}(\rho)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(\rho)}\right)x^{\nu+\gamma_1-1}.$$

Setzen wir in diese Gleichungen $\rho = 1-\gamma_1 = q$, so ergiebt sich zunächst ein schon bekanntes Resultat:

4a.) $$y_{01} = g(x,q) = \sum_{0\,\nu}^{\infty}\frac{a_\nu(q)}{a_{\gamma_1\gamma_1}(q)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(q)}x^\nu = P(\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1;\ u,q;\ x).$$

Es ergiebt sich nämlich leicht, dass

$$a_\nu(q) = a_{\nu,\nu-1}(0)\,a_{\nu-1}(q) - a_{\nu-1,\nu-1}(0)\,a_{\nu,\nu-2}(0)\,a_{\nu-2}(q)$$

weil

$$a_{\nu,\nu-1}(1-\gamma_1) = a_{\nu+1-\gamma_1,\nu-\gamma_1}(0), \qquad a_{\nu-1,\nu-1}(1-\gamma_1) = a_{\nu-\gamma_1,\nu-\gamma_1}(0),$$
$$a_{\nu,\nu-2}(1-\gamma_1) = a_{\nu+1-\gamma_1,\nu-1-\gamma_1}(0)$$

ist. Da nun $\alpha_0(q) = 1$, $\alpha_1(q) = \alpha_{10}(0) = \Delta^{(1)}(0)$, so ist

$$\alpha_\nu(q) = \Delta^{(\nu)}(0)$$

und daher ist $g(x,q) = P(\alpha,\beta,\gamma,\gamma;\ u,q;\ x)$. Ferner ist:

5a) $$y_{02} = P_1(\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1;\ u,q;\ x) + P(\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1;\ u,q;\ x)\log x$$

wo

$$P_1(\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1;\ u,q;\ x) = g'_0(q)\left\{x^{1-\gamma_1} + c_1(q)\,x^{2-\gamma_1} + \ldots + c_{\gamma_1-2}(q)\,x^{-1}\right\}$$
$$+\sum_{0\,\nu}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{a_\nu(\rho)}{a_{\gamma_1\gamma_1}(\rho)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(\rho)}\right)_{\rho=q}x^\nu.$$

Man findet

$$g'_0(q) = \frac{u^{\gamma_1-1}(-1)^{\gamma_1}(\gamma_1-1)!\,(\gamma_1-2)!}{\Delta^{(\gamma_1-1)}(q)}$$

und wenn wir setzen

$$\frac{a_\nu(\rho)}{a_{\gamma_1\gamma_1}(\rho)\ldots a_{\gamma_1-1+\nu,\gamma_1-1+\nu}(\rho)} = b_\nu(\rho), \qquad b'_\nu(\rho) = \frac{\partial}{\partial\rho}b_\nu(\rho)$$

$$b'_\nu(q) = b_\nu(q)\left\{\frac{\alpha'_\nu(q)}{\alpha_\nu(q)} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1+1} - \ldots - \frac{1}{\gamma_1+\nu-1}\right\}$$

β) $1-\gamma_1 > 0.$

Wenn man die Substitution $y = x^{1-\gamma_1}y_1$ in die Differentialgleichung IIIa macht, so ergiebt sich aus 5), dass man folgende Integrale erhält:

4a) $$y_{01} = x^{1-\gamma_1}\{P_1(\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x) + P(\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x)\log x\}.$$

5a) $$y_{02} = x^{1-\gamma_1}P(\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x).$$

γ) Wenn $\alpha-\beta$ eine positive ganze Zahl ist, so erhalten wir

6a) $$\overset{\infty}{y}_{01} = x^{-\alpha}P\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta,\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right).$$

7a) $$\overset{\infty}{y}_{02} = x^{-\alpha}\left\{P_1\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta,\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right) + P\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta,\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\right\}.$$

δ) Wenn $\alpha-\beta$ eine negative ganze Zahl ist, so erhalten wir

6a) $$\overset{\infty}{y}_{01} = x^{-\beta}\left\{P_1\left(\beta,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\beta-\alpha,\ 1+\beta-\alpha,\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right) + P\left(\beta,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+1+\beta-\alpha,\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\right\}.$$

7a) $$\overset{\infty}{y}_{02} = x^{-\beta}P\left(\beta,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1+\beta-\alpha,\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{u},\ q;\ \frac{1}{x}\right).$$

§ 2a. Die beiden Integrale in der Umgebung von $x = 1$ lauten

8a) $$y_{11} = P(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x).$$

8b) $$y_{12} = P_1(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x) + P(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x)\log(1-x),$$

wenn $\gamma-\alpha-\beta \leqq 1$ ist. Die anderen 4a—7a entsprechenden Integrale ergeben sich aus dem Früheren.

§ 3a. Das Fundamentalsystem in der Umgebung von $x = u$ lautet

12a) $$y_{u1} = P\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ q;\ \frac{x-u}{-u}\right),$$

13a) $$y_{u2} = P_1\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ q;\ \frac{x-u}{-u}\right) + P\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ \gamma-\gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ q;\ \frac{x-u}{-u}\right)\log\left(\frac{x-u}{-u}\right),$$

wenn $1-\gamma+\gamma_1 \leqq 1$ ist.

Durch diese Formeln ist die vollständige Integration der Differentialgleichung geliefert. Jedes beliebige Integral lässt sich in der Umgebung einer singulären Stelle durch das daselbst aufgestellte Fundamentalsystem linear und homogen ausdrücken.

C. Die 8.24 Integrale der Differentialgleichung.

Ich will zunächst die symmetrische Form IV dazu benutzen, um noch weitere 7 Integrale von IIIa zu bilden. Es ist

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x) = P(\varkappa+\lambda+\mu+\nu,\ \varkappa+\lambda+\mu+\nu',\ \lambda'+\lambda+2\varkappa+2\mu+\nu+\nu',\ 1-\varkappa'+\varkappa;\ u, q; x).$$

Daher ist

1′) $x^{\varkappa}(x+1)^{\lambda}(x-u)^{\mu} P(\varkappa+\lambda+\mu+\nu,\ \varkappa+\lambda+\mu+\nu',\ 2-\varkappa'+\varkappa-\mu'+\mu,\ 1-\varkappa'+\varkappa;\ u, q; x)$

ein Integral von IV. Nun bleibt IV bis auf ν ungeändert, wenn wir $\varkappa$ mit $\varkappa'$, λ mit λ' μ mit μ' vertauschen. Doch lässt sich auch die Aenderung von ν eliminiren, wenn wir q entsprechend bestimmen. Wir wollen indessen die verschiedenen Werte, die q bei den Vertauschungen annimmt und die leicht zu berechnen sind, immer mit q bezeichnen. Es ergeben sich mithin folgende Integrale

2′) $x^{\varkappa'}(x-1)^{\lambda}(x-u)^{\mu} P(\varkappa'+\lambda+\mu+\nu,\ \varkappa'+\lambda+\mu+\nu',\ 2-\varkappa+\varkappa'-\mu'+\mu,\ 1-\varkappa+\varkappa';\ u, q; x),$

3′) $x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda'}(x-u)^{\mu} P(\varkappa+\lambda'+\mu+\nu,\ \varkappa+\lambda'+\mu+\nu',\ 2-\varkappa'+\varkappa-\mu'+\mu,\ 1-\varkappa+\varkappa';\ u, q; x),$

4′) $x^{\varkappa'}(x-1)^{\lambda'}(x-u)^{\mu} P(\varkappa'+\lambda'+\mu+\nu,\ \varkappa'+\lambda'+\mu+\nu',\ 2-\varkappa+\varkappa'-\mu'+\mu,\ 1-\varkappa'+\varkappa;\ u, q; x),$

5′) $x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda}(x-u)^{\mu'} P(\varkappa+\lambda+\mu'+\nu,\ \varkappa+\lambda+\mu'+\nu',\ 2-\varkappa'+\varkappa-\mu+\mu',\ 1-\varkappa'+\varkappa;\ u, q; x),$

6′) $x^{\varkappa'}(x-1)^{\lambda}(x-u)^{\mu'} P(\varkappa'+\lambda+\mu'+\nu,\ \varkappa'+\lambda+\mu'+\nu',\ 2-\varkappa+\varkappa'-\mu+\mu',\ 1-\varkappa+\varkappa';\ u, q; x),$

7′) $x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda'}(x-u)^{\mu'} P(\varkappa+\lambda'+\mu'+\nu,\ \varkappa+\lambda'+\mu'+\nu',\ 2-\varkappa'+\varkappa-\mu+\mu',\ 1-\varkappa'+\varkappa;\ u, q; x),$

8′) $x^{\varkappa'}(x-1)^{\lambda'}(x-u)^{\mu'} P(\varkappa'+\lambda'+\mu'+\nu,\ \varkappa'+\lambda'+\mu'+\nu',\ 2-\varkappa+\varkappa'-\mu+\mu',\ 1-\varkappa+\varkappa';\ u, q; x).$

Wenn man in diesen Gleichungen

$$\varkappa = \lambda = \mu = 0, \quad \varkappa' = 1-\gamma_1, \quad \lambda' = \gamma-\alpha-\beta, \quad \mu' = 1-\gamma+\gamma_1, \quad \nu = \alpha, \quad \nu' = \beta$$

setzt, so erhalten wir 8 Integrale von IIIa

1) $P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x),$

2) $x^{1-\gamma_1} P(\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u, q; x),$

3) $(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} P(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma,\ \gamma_1;\ u, q; x),$

4) $x^{1-\gamma_1}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} P(1-\gamma_1+\gamma-\beta,\ 1-\gamma_1+\gamma-\alpha,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u, q; x),$

5) $(x-u)^{1-\gamma+\gamma_1} P(1-\gamma+\gamma_1+\alpha,\ 1-\gamma+\gamma_1+\beta,\ \gamma+2(1-\gamma+\gamma_1),\ \gamma_1;\ u, q; x),$

6) $x^{1-\gamma_1}(x-u)^{1-\gamma+\gamma_1} P(2-\gamma+\alpha,\ 2-\gamma+\beta,\ 4-\gamma,\ 2-\gamma_1;\ u, q; x),$

7) $(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}(x-u)^{1-\gamma+\gamma_1} P(1+\gamma_1-\beta,\ 1+\gamma_1-\alpha,\ \gamma+2(1-\gamma+\gamma_1),\ \gamma_1;\ u, q; x),$

8) $x^{1-\gamma_1}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}(x-u)^{1-\gamma+\gamma_1} P(2-\beta,\ 2-\alpha,\ 4-\gamma,\ 2-\gamma_1;\ u, q; x).$

Wenn man nun Substitutionen anwendet, durch welche der Charakter der Differentialgleichung nicht geändert wird, durch welche also nur eine Vertauschung der singulären Stellen erfolgt, so ist man imstande, mit Hülfe der eben berechneten 8 Integrale für jede Transfor-

mation 8 ihr entsprechende Integrale aufzustellen. Es giebt nun im ganzen 24 solcher Transformationen, da sich 3 Elemente 6 mal permutiren und 4 Elemente 4 mal zu je dreien combiniren lassen. Diese Transformationen heissen (cf. Heun l. c.):

$$\begin{array}{llllll} x, & 1-x, & \frac{1}{x}, & \frac{x-1}{x}, & \frac{1}{1-x}, & \frac{x}{x-1}. \\ \frac{u}{x}, & \frac{x-u}{x}, & \frac{x}{u}, & \frac{u-x}{u}, & \frac{x}{x-u}, & \frac{u}{u-x}. \\ \frac{x-u}{x-1}, & \frac{u-1}{x-1}, & \frac{x-1}{x-u}, & \frac{1-u}{x-u}, & \frac{x-1}{u-1}, & \frac{x-u}{1-u}. \\ \frac{u(x-1)}{x-u}, & \frac{(1-u)x}{x-u}, & \frac{x-u}{u(x-1)}, & \frac{(u-1)x}{u(x-1)}, & \frac{x-u}{(1-u)x}, & \frac{u(x-1)}{(u-1)x}. \end{array}$$

Dieselben sind so geordnet, dass sowohl die in horizontalen wie in vertikalen Reihen stehenden Transformationen eine Gruppe bilden. Die Erzeugenden einer jeden Gruppe sind die drei ersten Transformationen in jeder horizontalen und jeder vertikalen Reihe. Die in der 4. Horizontalreihe stehenden Transformationen bringen auf die Integration angewandt nichts neues. Auch $\frac{u}{x}$, $\frac{x}{u}$, $\frac{u-1}{x-1}$, $\frac{1-u}{x-u}$, $\frac{x-1}{u-1}$, $\frac{x-u}{1-u}$ unterscheiden sich bei Anwendung auf die Integration nicht wesentlich von $\frac{1}{x}$, x, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x-u}$, $1-x$, $\frac{x-u}{u}$. Wir haben im ganzen 24 Transformationen, also erhalten wir $8.24 = 192$ Integrale. Da wir indessen für die Integration 12 Transformationen als unwesentlich nicht berücksichtigen, so bleiben $8.12 = 96$ wesentlich verschiedene Integrale. Die Berechnung dieser Integrale, bei welchen wir wiederum den Parameter q nicht näher bestimmen wollen, führen wir auf die Berechnung der zu den Transformationen x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x-1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{u}{x}$, $\frac{x-u}{x-1}$ gehörigen Integrale zurück, aus welchen sich alle übrigen ergeben, und zwar berechnen wir nur die dem $P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x)$ entsprechenden Integrale, da sich die anderen zu derselben Transformation gehörigen Integrale aus den Gleichungen 1)—8) ergeben. Ausserdem wollen wir noch diejenigen Integrale aufstellen, welche für $q = u$, $\gamma = \gamma_1$ gemäss der Beziehung

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, u; x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$$

in Integrale der Gauss'schen Differentialgleichung übergehen.

Das der Transformation $\xi = 1-x$ entsprechende Integral ergiebt sich nach B 8) in der Form:

9) $P(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma_1, 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u, q;\ 1-x)$.

Hieraus ergeben sich weitere 7 Integrale, von denen wir aber nur noch 3 den Gauss'schen Integralen entsprechende notieren wollen.

10) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 2\gamma-\gamma_1-\alpha-\beta+1,\ 1-\alpha-\beta+\gamma;\ 1-u, q;\ 1-x)$,

11) $x^{1-\gamma_1} P(1+\alpha-\gamma_1,\ 1+\beta-\gamma_1,\ 1+\alpha+\beta-\gamma_1,\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x)$,

12) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1-\gamma_1} P(1-\gamma_1+\gamma-\beta,\ 1-\gamma_1+\gamma-\alpha,\ 2\gamma-\gamma_1-\alpha-\beta+1,\ 1-\alpha-\beta+\gamma;\ 1-u,\ q;\ 1-x)\ldots.$

Bei allen weiteren Transformationen verfahren wir ebenso. Für $\xi = \frac{1}{x}$ ergiebt sich:

17) $x^{-\alpha} P\left(\alpha, \alpha+1-\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta, 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u}, q;\ \frac{1}{x}\right)$,

18) $x^{-\beta} P\left(\beta, \beta+1-\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1-\alpha+\beta, 1-\alpha+\beta;\ \frac{1}{u}, q;\ \frac{1}{x}\right)$,

19) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P\left(\gamma-\beta, \gamma-\gamma_1+1-\beta, \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta, 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{u}, q;\ \frac{1}{x}\right)$,

20) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P\left(\gamma-\alpha, \gamma-\gamma_1+1-\alpha, \gamma-\gamma_1+1+\beta-\alpha, 1-\alpha+\beta;\ \frac{1}{u}, q;\ \frac{1}{x}\right)\ldots.$

Für $\xi = \frac{1}{1-x}$ ergiebt sich:

25) $(1-x)^{-\alpha} P\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta, 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-u}, q;\ \frac{1}{1-x}\right)$,

26) $(1-x)^{-\beta} P\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\gamma_1+1+\beta-\alpha, 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{1-u}, q;\ \frac{1}{1-x}\right)$,

27) $x^{1-\gamma_1}(1-x)^{\gamma_1-\alpha-1} P\left(\alpha+1-\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1-\beta, \gamma-\gamma_1+1+\alpha-\beta, 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-u}, q;\ \frac{1}{1-x}\right)$,

28) $x^{1-\gamma_1}(1-x)^{\gamma_1-\beta-1} P\left(\beta+1-\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1-\alpha, \gamma-\gamma_1+1+\beta-\alpha, 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{1-u}, q;\ \frac{1}{1-x}\right)\ldots.$

Für $\xi = \frac{x-1}{x}$ ergiebt sich:

33) $x^{-\alpha} P\left(\alpha, \alpha+1-\gamma_1, 1-\gamma_1+a+\beta, 1-\gamma+\alpha+\beta;\ \frac{u-1}{u}, q;\ \frac{x-1}{x}\right)$,

34) $x^{-\beta} P\left(\beta, \beta+1-\gamma_1, 1-\gamma_1+\alpha+\beta, 1-\gamma+\alpha+\beta;\ \frac{u-1}{u}, q;\ \frac{x-1}{x}\right)$,

35) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P\left(\gamma-\beta, \gamma-\gamma_1+1-\beta, 1+2\gamma-\gamma_1-\alpha-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{u-1}{u}, q;\ \frac{x-1}{x}\right)$,

36) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P\left(\gamma-\alpha, \gamma-\gamma_1+1-\alpha, 1+2\gamma-\gamma_1-\alpha-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{u-1}{u}, q;\ \frac{x-1}{x}\right)\ldots.$

Für $\xi = \frac{x}{x-1}$ ergiebt sich;

41) $(1-x)^{-\alpha} P\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \gamma_1;\ \frac{u}{u-1}, q;\ \frac{x}{x-1}\right)$,

42) $(1-x)^{-\beta} P\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \gamma_1; \frac{u}{u-1}, q; \frac{x}{x-1}\right)$,

43) $x^{1-\gamma_1}(1-x)^{\gamma_1-\alpha-1} P\left(\alpha+1-\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1-\beta, 2+\gamma-2\gamma_1, 2-\gamma_1; \frac{u}{u-1}, q; \frac{x}{x-1}\right)$,

44) $x^{1-\gamma_1}(1-x)^{\gamma_1-\beta-1} P\left(\beta+1+\gamma_1, \gamma-\gamma_1+1-\alpha, 2+\gamma-2\gamma_1, 2-\gamma_1; \frac{u}{u-1}, q; \frac{x}{x-1}\right)\cdots$.

Um die Integrale zu berechnen, welche zu den in der zweiten Horizontalreihe gehörigen Transformationen gehören, gehe man aus von

49) $P\left(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma_1, \gamma-\gamma_1; \frac{u-1}{u}, q; \frac{x-u}{-u}\right)\cdots$ cf. B. 12)

aus welchem sich zunächst

57) $P\left(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma+\gamma_1, \gamma_1; \frac{1}{u}, q; \frac{x}{u}\right)$

und hieraus

65) $\left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha} P\left(\alpha, \alpha+1-\gamma_1, 2+2\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta; u, q; \frac{u}{x}\right)$

als das Integral ergiebt, von welchem ausgehend wir alle Integrale, welche zu den in der zweiten Horizontalreihe stehenden Transformationen gehören, bilden wollten. Um das zu $\xi = \frac{x-u}{x-1}$ gehörige Integral zu berechnen, gehen wir aus von $\xi = \frac{x-1}{u-1}$ und erhalten

97) $P\left(\alpha, \beta, \gamma_1-\gamma+1+\alpha+\beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; \frac{1}{1-u}, q; \frac{x-1}{u-1}\right)\cdots$

Es geht hier q über in $\frac{q-1}{u-1}$. Hieraus erhalten wir

105) $\left(\frac{x-1}{u-1}\right)^{-\alpha} P\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma_1+1+\alpha-\beta, 1+\alpha-\beta; 1-u, q; \frac{u-1}{x-1}\right)\cdots$

und daraus ergiebt sich

113) $\left(\frac{x-1}{u-1}\right)^{-\alpha} P\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \gamma-\gamma_1; u, q; \frac{x-u}{x-1}\right)\cdots$

Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, die Integrale zu berechnen, welche zu den in der dritten Horizontalreihe stehenden Transformatiou gehören. Die anderen noch übrigen Integrale 145) — 192) erhält man aus

145) $\left(\frac{x-u}{u(x-1)}\right)^{-\alpha} P\left(\alpha, \alpha+1-\gamma+\gamma_1, 2+2\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta-\gamma; u, q; \frac{u(x-1)}{x-u}\right)\cdots$

In derselben Weise lassen sich die Integrale der Differentialgleichung mit mehr als 3 singulären Punkten berechnen. Die Anzahl derselben ergiebt sich für eine Differentialgleichung mit 4 singulären Punkten

zu $16.10.6 = 960$, allgemein für eine mit u singulären Punkten zu

$$\frac{2^n(n+1)(n-1)n}{1.2.3} \cdot 6 = 2^n(n+1)(n-1)n.$$

Ich will noch erwähnen, dass es mit Hilfe der eben aufgestellten Integrale möglich ist, ähnlich wie es bei der Gauss'schen Differentialgleichung mit Hilfe des Schwarz'schen Differentialausdrucks Δ geschieht, sämtliche Transformationen

$$z = w\zeta$$
$$\xi = f(x)$$

wo w und ζ Funktionen von ξ bedeuten, anzugeben, durch welche die Differentialgleichung IIIa. in eine ihr ähnliche übergeht, also $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1$ in lineare Verbindungen dieser Grössen sich verwandeln, während u, q entsprechend verändert werden. Es geht z. B. aus der Gleichung 17) hervor, dass $z = \xi^\alpha y$, $\xi = \frac{1}{x}$ die Differentialgleichung IIIa. in eine ihr ähnliche verwandelt, welche für y als Funktion von ξ gilt, in welcher indessen q noch zu berechnen ist, während $\frac{1}{u}$ an die Stelle von u tritt.

D. Anwendungen der Funktion P und ihrer sie definirenden Differentialgleichung auf verschiedene Beispiele.

§ 1. Ableitung der hypergeometrischen Differentialgleichung mit einem Nebenpunkt und mit einem zweifachen Nebenpunkt.

In dem Nachlasse von Riemann findet sich in No. 17 der Abhandlung: »Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung« (Ges. Werke XVII) die Entwicklung einer P Funktion mit einem Nebenpunkt. Ein Nebenpunkt ist durch folgende Bedingungen definirt: 1) Die Exponenten der für den als singulären Punkt anzusehenden Nebenpunkt geltenden Entwicklungen eines Fundamentalsystems müssen ganze Zahlen sein. 2) Es dürfen in diesen Entwicklungen keine Logarithmen auftreten. Man nennt einen Nebenpunkt von der Ordnung k, wenn $\nu + \nu' - 1 = k$, wo ν und ν' die in Frage stehenden Exponenten für die Entwicklungen in der Umgebung des Nebenpunktes sind. In unserem Falle soll $k = 1$, also $\nu + \nu' = 2$ sein, was nur die einzige Möglichkeit $\nu = 0$, $\nu' = 2$, da $\nu = \nu' = 1$ sicher einen Logarithmus zur Folge hätte. Es ist also in IIIa. $1 - \gamma + \gamma_1 = 2$ zu

setzen und ausserdem ist q so zu bestimmen, dass der Koefficient von x^2 in der Entwicklung von

$$P\left(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma,\ \gamma-\gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ \frac{u-q}{u};\ \frac{x-u}{-u}\right)$$

verschwindet. Diese Bedingung lautet:

$$\left(1+\alpha+\beta-\gamma_1+\gamma\frac{u-1}{u}+\frac{u-q}{u}\alpha\beta\right)\frac{u-q}{u}-\frac{u-1}{u}(\gamma-\gamma_1)=0,$$

$$((\alpha+\beta)u-\gamma+(u-q)\alpha\beta)(u-q)+u(u-1)=0.$$

1) $$q^2\alpha\beta-(2u\alpha\beta+(\alpha+\beta)u+\lambda-\lambda'-\alpha-\beta)q+u(u-1)+u^2(\alpha+\beta)$$
$$+(\lambda-\lambda'-\alpha-\beta)u+u^2\alpha\beta=0. \qquad \begin{matrix}\alpha=\varkappa+\lambda+\mu+\nu\\ \beta=\varkappa+\lambda+\mu+\nu'\end{matrix}$$

Ich will nachweisen, dass diese Bedingung mit der von Herrn Ritter[1]) gewonnenen übereinstimmt. Ich gehe dabei aus von IV., indem ich darin $\mu=0$, $\mu'=2$ setze, und erhalte:

$$y''+\left\{\frac{1-\varkappa-\varkappa'}{x}+\frac{1-\lambda'-\lambda}{x-1}-\frac{1}{x-u}\right\}y'$$
$$+\left\{\frac{\varkappa\varkappa' u}{x}+\frac{\lambda\lambda'(1-u)}{x-1}+\nu\nu' x+\nu\right\}\frac{y^2}{x(x-1)(x-u)}=0.$$

$$r=-\varkappa-\varkappa\varkappa'+\lambda\lambda'+(\varkappa+\lambda-\varkappa\lambda'-\varkappa'\lambda-\varkappa\varkappa'-\lambda\lambda')u-\alpha\beta q. \qquad \begin{matrix}\alpha=\varkappa+\lambda+\nu\\ \beta=\varkappa+\lambda+\nu'\end{matrix}$$

Indem ich nun den Koefficienten von y umschreibe und

$$\varkappa\varkappa'-\lambda\lambda'+\nu\nu' u+r=A'$$

setze, erhalte ich:

2) $$y''+\left\{\frac{1-\varkappa-\varkappa'}{x}+\frac{1-\lambda'-\lambda}{x-1}-\frac{1}{x-u}\right\}y'+\left\{\frac{-\varkappa\varkappa'}{x}+\frac{\lambda\lambda'}{x-1}+\nu\nu'+\frac{A'}{x-u}\right\}\frac{y}{x(x-1)}=0,$$

welche Gleichung mit der von Herrn Ritter aufgestellten bis auf die Constanten übereinstimmt. Diese Gleichung geht durch die Transformation $y=x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda}z$ in folgende Differentialgleichung über:

$$z''+\left\{\frac{1-\varkappa'+\varkappa}{x}+\frac{1-\lambda'+\lambda}{x-1}-\frac{1}{x-u}\right\}z'+\frac{\alpha\beta(x-q)}{x(x-1)(x-u)}z=0,$$

$$q=\frac{A'+\varkappa-(\varkappa+\lambda-\varkappa\lambda'-\varkappa'\lambda-\varkappa'\varkappa-\lambda\lambda'+\nu\nu')u}{-(\varkappa+\lambda+\nu)(\varkappa+\lambda+\nu')}.$$

Setzen wir nun den Wert

$$q=\frac{A'+e}{-\alpha\beta}, \qquad e=\varkappa(1-u)-(\lambda-\varkappa\lambda'-\varkappa'\lambda-\varkappa\varkappa'-\lambda\lambda'+\nu\nu')u$$

in 1) ein, indem wir in letzterer noch $\mu=0$ setzen, so ist

1) Math. Annalen, Bd. 48.

$$A'^2 + (2e+p)A' + e^2 + pe + s\alpha\beta = 0,$$

wenn wir

$$p = 2u\alpha\beta + (\alpha+\beta)(u-1) + \lambda - \lambda',$$
$$s = n(u-1) + u^2(\alpha+\beta) + (\lambda - \lambda' - \alpha - \beta)u + u^2\alpha\beta$$

setzen.

Diese Gleichung lässt sich mit Hülfe der Relation

$$\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda + \varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' - \nu\nu' + \alpha\beta = (\varkappa'+\lambda')(\varkappa+\lambda) - \nu\nu' + \alpha\beta = 0$$

auf die Form bringen

1a) $$A'^2 - A'u(u-1)\left\{\frac{\varkappa+\varkappa'}{u} + \frac{\lambda+\lambda'}{u-1}\right\} + u(u-1)\left\{\frac{-\varkappa\varkappa'}{u} + \frac{\lambda\lambda'}{u-1} + \nu\nu'\right\} = 0,$$

welche bis auf die Bezeichnung der Exponenten mit der von Herrn Ritter aufgestellten übereinstimmt. Durch die Transformation

$$x = \frac{(t-a_1)(a_2-a_3)}{(t-a_3)(a_2-a_1)}, \qquad u = \frac{(a_4-a_1)(a_2-a_3)}{(a_4-a_3)(a_2-a_1)},$$

welche das Doppelverhältnis zwischen den vier Punkten t, a_1, a_2, a_3 ausdrückt, wird IV. in eine vollständig symmetrische Form übergeführt, indem auch der unendlich ferne Punkt in den endlichen Punkt a_3 verlegt wird, und die Bedingung dafür, dass der Punkt a_4 ein einfacher Nebenpunkt sei, erhält man aus 1a), indem man in 1a) für u seinen Wert einsetzt.

In derselben Weise lässt sich die Bedingung dafür aufstellen, dass für IV. der Punkt u ein zweifacher Nebenpunkt ist, und ich will diese Bedingung hier noch entwickeln, weil die dadurch entstehende Differentialgleichung eine Rolle bei der oben erwähnten Abhandlung von Riemann[1]) spielt und daher historisch von Bedeutung ist. Ich setze in IV. $\mu = 0$ und $\mu' = 3$, so dass

$$\varkappa + \varkappa' + \lambda + \lambda' + \nu + \nu' = -1$$

ist und erhalte eine Differentialgleichung, in welcher

$$r = -2\varkappa - \varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' + (\varkappa + \lambda - \varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda - \varkappa\varkappa' - \lambda\lambda')u - \alpha\beta q.$$

Indem ich wieder den Koefficienten von y umschreibe und

$$\varkappa\varkappa' - \lambda\lambda' + \nu\nu' u + \nu = A'$$

setze, erhalte ich dieselbe Differentialgleichung mit A' als Parameter wie früher. Diese Gleichung geht durch $y = x^{\varkappa}(x-1)^{\lambda}z$ in unsere

1) Gesammelte Werke, No. XVII, pg. 323.

Gleichung IIIa über, wenn man in ihr $\mu = 0$, $\mu' = 3$

$$q = \frac{A' + 2\varkappa - (\varkappa + \lambda - \varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda - \varkappa\varkappa' - \lambda\lambda' + \nu\nu')u}{-(\varkappa + \lambda + \nu)(\varkappa + \lambda + \nu')}$$

setzt.

Um nun die Bedingung dafür aufzustellen, dass in IIIa u ein zweifacher Nebenpunkt ist, müssen wir $\mu' - \mu = 1 - \gamma + \gamma_1 = 3$ setzen und ausserdem dafür sorgen, dass in der Entwicklung von

$$P\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + 1 - \gamma_1,\ \gamma - \gamma_1;\ \frac{u-1}{u},\ \frac{u-q}{u},\ \frac{x-u}{-u}\right)$$

der Koefficient von x^3 verschwindet. Diese Bedingung lautet:

3) $$\{2u - 2 + 2(\alpha+\beta)u - 2\gamma + (u-q)\alpha\beta\}\{((\alpha+\beta-1)u - \gamma + (u-q)\alpha\beta)(u-q)\alpha\beta + 2u(u-1)\alpha\beta\} + 2u(u-1)(\alpha+1)(\beta+1)\alpha\beta(u-q) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$q = \frac{A' + e}{-\alpha\beta}, \qquad e = 2\varkappa - (\varkappa + \lambda - \varkappa'\lambda - \varkappa\lambda' - \varkappa\varkappa' - \lambda\lambda' + \nu\nu')u = -2\lambda - \alpha\beta u,$$

da

$$\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda + \varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' - \nu\nu' + \alpha\beta = -(\varkappa + \lambda)$$

im jetzigen Falle ist,

$$(u - q)\alpha\beta = u\alpha\beta + A' + e = A' - 2\lambda,$$

so erhalten wir in

3a) $$A'^3 + A'^2\{(\alpha+\beta-1)u - \gamma - 4\lambda + 2(\alpha+\beta+1)u - 2(\gamma+1+\lambda)\}$$
$$+ A'\{((\alpha+\beta-1)u - \gamma - 4\lambda)(2(\alpha+\beta+1)u - 2(\gamma+1+\lambda)) - 2\lambda((\alpha+\beta+1)u - \gamma - 2\lambda) + 2u(u-1)\alpha\beta + 2u(u-1)(\alpha+1)(\beta+1)\}$$
$$+ (2(\alpha+\beta-1)u - 2(\gamma+1+\lambda)(-2\lambda((\alpha+\beta-1)u - \gamma - 2\lambda) + 2u(u-1)\alpha\beta) - 2\lambda \cdot 2u(u-1)(\alpha+1)(\beta+1) = 0,$$

wenn wir darin noch

$$\alpha = \varkappa + \lambda + \nu, \qquad \beta = \varkappa + \lambda + \nu', \qquad \gamma = -1 + \varkappa - \varkappa'$$

sitzen, die Bedingung dafür, dass in

4) $$y'' + \left\{\frac{1-\varkappa-\varkappa'}{x} + \frac{1-\lambda-\lambda'}{x-1} - \frac{2}{x-u}\right\}y' + \left\{\frac{-\varkappa\varkappa'}{x} + \frac{\lambda\lambda'}{x-1} + \nu\nu' + \frac{A'}{x-u}\right\}\frac{y}{x(x-1)} = 0.$$

u ein zweifacher Nebenpunkt ist. Wir haben also auf diese Weise eine hypergeometrische Differentialgleichung mit einem zweifachen Nebenpunkt aufgestellt. Die Differentialgleichung 4) kann ebenso untersucht werden, wie Herr Ritter die Differentialgleichung 2) untersucht hat, indem man besonders diejenigen Stellen von u in Betracht

zieht, für welche die Discriminante von 3a) verschwindet, wo also zwei von den Wurzeln von 3a) zusammenfallen.

In derselben Weise verfahre ich, um die Bedingung dafür aufzustellen, dass u ein $n$facher Nebenpunkt sei. Ich erhalte dann eine Differentialgleichung von der Form 4), in welcher n an die Stelle von 2 getreten ist, und wo A' durch eine Gleichung $n+1$ Grades bestimmt ist. Es ist dann $\mu - \mu' = n+1$, und es giebt daher verschiedene Möglichkeiten für die Werte von μ und μ', doch alle Fälle lassen sich nach derselben angegebenen Methode behandeln. Ich habe also hiermit einen speciellen Teil der Frage: »Wie sieht die Differentialgleichung einer P-Funktion mit k Nebenpunkten aus«, welche Herr Klein in seiner Vorlesung über die hypergeometrische Funktion pg. 234 zur Bearbeitung vorschlägt, erledigt. Um die Frage allgemein zu lösen, müsste man eine Differentialgleichung mit den singulären Punkten 0, 1, u_1, u_2, ... u_k aufstellen, die Integrale für die Umgebung der singulären Stellen berechnen und unter der Voraussetzung, dass die Exponenten der zu den Stellen u_1, u_2, ... u_k gehörigen Integrale ganze positive Zahlen sind, die k Bedingungsgleichungen dafür aufstellen, dass an den Stellen u_1, u_2, ... u_k keine Logarithmen auftreten.

§ 2. Die vollständigen elliptischen Integrale[1]).

Die Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa_1^2 x^2)}} = \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

genügen bekanntlich der Gleichung; (Legendre: Traité des fonctions elliptiques, Tome I. cap. XIII)

$$1) \qquad \varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2u}{d\varkappa^2} + (1-3\varkappa^2)\frac{du}{d\varkappa} - \varkappa u = 0.$$

Diese Gleichung erhalten wir aus unserer allgemeinen Gleichung IIIa, wenn wir

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad u = -1, \quad q = 0$$

setzen, so dass

$$y_{01} = P(1, 1, 2, 1; -1, 0; \varkappa)$$

das allgemeine Integral von 1) ist, aus dem sich alle anderen durch

1) Seifert, l. c. pg. 25 ff.; Schlesinger, Handbuch, Bd. II, pg. 476 ff.

Veränderung der Argumente ableiten lassen. Es ist in diesem Falle $u = -1$ und wir bemerken, dass daher die Recursionsformel B 16) übergeht in

$$\Delta^{(\nu+1)}(\rho) = -a_{\nu\nu}(\rho)\, a_{\nu+1,\nu-1}(\rho)\, \Delta^{(\nu-1)}(\rho),$$

da

$$a_{\nu+1,\nu}(\rho) = f_1(\rho+\nu) = -(u+1)(\rho+\nu)(\rho+\nu-1) - (\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u)(\rho+\nu) - q\alpha\beta$$

für Gleichung 1) für alle Werte von ρ und ν verschwindet.

Daraus folgt für grade n

$$\Delta^{(n)}(\rho) = (-1)^{\frac{n}{2}} a_{n-1,n-1}(\rho)\, a_{n,n-2}(\rho)\, a_{n-3,n-3}(\rho)\, a_{n-2,n-4}(\rho) \cdots a_{11}(\rho)\, a_{20}(\rho)$$

für ungrade n dagegen

$$\Delta^{(n)}(\rho) = 0,$$

da $\Delta^{(1)}(\rho) = -a_{10}(\rho) = 0$ und sich alle ungraden $\Delta^{(n)}(\rho)$ durch $\Delta^{(1)}(\rho)$ ausdrücken lassen. Die Bedingung $u = -1$ ist aber allein nicht hinreichend dafür, dass wir eine zweigliedrige Recursionsformel erhalten, vielmehr muss noch der Koefficient von x im Koefficienten von y' der allgemeinen Gleichung IIIa: $-\gamma - (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u = 0$ und $q\alpha\beta = 0$, also q oder α oder β Null sein. Die von Herrn Seifert in seiner Dissertation pg. 21 aufgestellte Bedingung $s_i = a_k + a_l - 2a_i = 0$ ist also für das Auftreten einer zweigliedrigen Recursionsformel nicht hinreichend. Ebenso ist die Bedingung $a_k = a_i$ allein nicht hinreichend für das Auftreten einer zweigliedrigen Recursionsformel, vielmehr ist noch die Bedingung erforderlich $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}a_i + \mathfrak{c}a_i^2 = 0$. Wir erhalten also in dem Falle $u = -1$, $\gamma + (\gamma_1 - \gamma + 1 + \alpha + \beta)u = 0$, $q = 0$ für unbestimmtes ρ das Integral in der Form

$$g(x,\rho) = g_0(\rho) \sum_0^\infty{}_n \frac{\Delta^{(2n)}(\rho)}{a_{11}(\rho) \cdots a_{2n,2n}(\rho)} x^{\rho+2n} = g_0(\rho) \sum_0^\infty (-1)^n \frac{a_{20}(\rho)\, a_{42}(\rho) \cdots a_{2n,2n-2}(\rho)}{a_{22}(\rho)\, a_{44}(\rho) \cdots a_{2n,2n}(\rho)} x^{\rho+2n}$$

$$= g_0(\rho) \sum_0^\infty{}_n \frac{(\rho+\alpha)(\rho+\beta)(\rho+\alpha+2)(\rho+\beta+2)\cdots(\rho+\alpha+2n-2)(\rho+\beta+2n-2)}{(\rho+2)(\rho+4)\cdots(\rho+2n)(\rho+1+\gamma_1)(\rho+2+\gamma_1)\cdots(\rho+2n-1+\gamma_1)} x^{\rho+2n}.$$

Daraus folgt, dass für $\rho = 0$

$$y_{01} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^6 + \cdots$$

ein Integral der Gleichung 1) ist. Das andere Integral in der Umgebung von $x = 0$ enthält notwendig Logarithmen, da $1 - \gamma_1 = 0$ ist. Es hat die Form

$$y_{02} = P_1(1, 1, 2, 1; -1, 0; x) + y_{01} \log x,$$

wo

$$P_1(1,\ 1,\ 2,\ 1;\ -1,\ 0;\ \varkappa) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \varkappa^2 + \frac{1.3.7}{2^2.4^3}\varkappa^4 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \left\{\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right\} \varkappa^{2n} + \cdots$$

Da y_{01} und y_{02} ein Fundamentalsystem bilden und K, wie wir auch noch beweisen wollen, ein Integral von 1) ist, so ist:

$$K = Cy_{01} + C' y_{02}.$$

Da nun K für $\varkappa = 0\,\frac{\pi}{2}$ wird, so muss $C = \frac{\pi}{2}$, $C' = 0$ sein

$$K = \frac{\pi}{2} y_{01} = \frac{\pi}{2} P(1,\ 1,\ 2,\ 1;\ -1,\ 0;\ \varkappa).$$

Die anderen Fundamentalsysteme in der Umgebung der anderen singulären Stellen können benutzt werden, um K noch auf andere Weise auszudrücken.

Da

$$P(1,\ 1,\ 2,\ 1;\ -1,\ 0;\ \varkappa) = F(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1;\ \varkappa^2)$$

ist, so erhalten wir, wenn wir $\varkappa^2 = x$ setzen, eine Reihe, welche der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$y^{(2)} + \frac{1-2x}{x(1-x)} y' - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x(1-x)} y = 0$$

Genüge leistet und welche durch die Transformation

$$y = \varkappa u, \qquad x = \frac{1}{\varkappa^2}$$

aus 1) hervorgeht, wie man sich leicht überzeugt. Wir haben in der Gauss'schen Reihe $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ zu setzen. Es ist nun bekannt, dass

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$$

der hypergeometrischen Differentialgleichung genügt und auch eine hypergeometrische Function ist. Es ist nämlich

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-xu)^{-\frac{1}{2}}\,du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}} = CF(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1;\ x).$$

C ist hierbei eine ganz bestimmte Constante, man nennt sie Euler'sches Integral erster Gattung. Setzt man nun $x = \varkappa^2$, $u = y^2$ so erhält man

$$2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}} = 2K = CF(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1;\ \varkappa^2),$$

und damit ist der Beweis geführt, dass in der That K ein Integral der Legendre'schen Gleichung ist.

Führt man in 1) die Substitution ein

$$\varkappa^2 = 1-\varkappa_1^2,$$

so erhält man die Gleichung

1a.) $$\varkappa_1(1-\varkappa_1^2)\frac{d^2u}{d\varkappa^2}+(1-3\varkappa_1^2)\frac{du}{d\varkappa}-\varkappa_1 u = 0.$$

Es wird daher sowohl 1a.) wie 1) durch

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2,y^2)}} = K'$$

befriedigt, und es zeigt sich also, dass K und K' ein Fundamentalsystem der Legendre'schen Gleichung bilden.

Untersuchen wir jetzt die Differentialgleichung

3) $$\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2v}{d\varkappa^2}+(1-\varkappa^2)\frac{dv}{d\varkappa}+\varkappa v = 0,$$

so bemerken wir, dass dieselbe aus der allgemeinen Gleichung IIIa. hervorgeht, wenn wir $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 1$, $u = -1$, $q = 0$ setzen. Das Integral P ergiebt sich daher aus der Formel für $g(x, \rho)$ auf pg. 27 in folgender Form:

$$y_{01} = P(1, -1, 1, 1; -1, 0; \varkappa) = 1-\frac{1}{2^2}\varkappa^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}\varkappa^4-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\varkappa^6$$
$$-\cdots-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-3)^2(2n-1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n-2)^2(2n)^2}\varkappa^{2n}-\cdots = F(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, 1, \varkappa^2)$$
$$= C\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-\varkappa^2 u)^{\frac{1}{2}}du = 2C\int_0^1\sqrt{\frac{1-\varkappa^2y^2}{1-y^2}}dy = 2CE$$

wenn wir $u = y^2$ setzen. C ist hier wiederum der reciproke Wert eines Euler'schen Integrals erster Gattung und E ein Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals zweiter Gattung. Es folgt ebenso wie früher

$$E = \frac{\pi}{2}P(1, -1, 1, 1; -1, 0; \varkappa).$$

Wenn wir $\varkappa_1^2 = 1-\varkappa^2$ in 3) einsetzen, erhalten wir folgende Gleichung:

3a.) $$\varkappa_1(1-\varkappa_1^2)\frac{d^2v}{d\varkappa_1^2}-(1+\varkappa_1^2)\frac{dv}{d\varkappa_1}+\varkappa_1 v = 0,$$

in welcher also $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\gamma_1 = -1$, $u = -1$, $q = 0$ ist.

Es interessirt uns hier das Integral, welches zum Exponenten $1-\gamma_1 = 2$ gehört, und welches sicher logarithmen frei ist.

$$y_{02} = \varkappa_1^2\left\{1+\frac{1^2.3}{2.4}\varkappa_1^2+\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\varkappa_1^4+\cdots+\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2(2n+2)}\varkappa_1^{2n}+\cdots\right\}$$

$$= \varkappa_1^2 F(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 2; \varkappa^2) = C\varkappa_1^2\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}(1-\varkappa_1^2 u)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= C'\int_1^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{1-\varkappa_1^2y^2}{1-y^2}}\,dy$$

wo $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\varkappa_1^2 t}}$ und $C' = 2Ci$ gesetzt ist.

Es bilden also

$$E = \int_0^1\sqrt{\frac{1-\varkappa^2y^2}{1-y^2}}\,dy \text{ und } E' = \int_0^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{1-\varkappa^2y^2}{1-y^2}}\,dy$$ [1]

ein Fundamentalsystem von 3). Da sich C zu $\frac{1}{\pi}$ ergiebt, wenn wir $\varkappa_1 = 0$ setzen, so ist $\frac{1}{C'} = \frac{\pi}{2i}$ und daher

$$E' = \frac{\pi}{2i}y_{02} = \frac{\pi}{2i}\varkappa_1^2 P(3, 1, 5, 3; -1, 0; \varkappa).$$

Durch die Formeln für K und E ist man in den Stand gesetzt, den wesentlichen Unterschied zwischen K und E zu erkennen. $\frac{dK}{d(\varkappa^2)}$ ist nämlich stets positiv, $\frac{dE}{d(\varkappa^2)}$ dagegen stets negativ für Werte von $\varkappa$ zwischen 0 und 1. Da K und E beide für $\varkappa = 0$ $\frac{\pi}{2}$ sind, so nimmt also K von $\frac{\pi}{2}$ an zu, während E von $\frac{\pi}{2}$ an abnimmt, wenn $\varkappa$ zwischen 0 und 1 sich bewegt.

Es würde ferner möglich sein zu zeigen, dass E sich durch K und $\frac{dK}{d\varkappa}$, sowie K sich durch E und $\frac{dE}{d\varkappa}$ mit in $\varkappa$ rationalen Koefficienten ausdrücken lässt, weil die beiden Differentialgleichungen 2) und 3) zu derselben Klasse[2]) gehören. Es ist in der That

$$K = E-\varkappa\frac{dE}{d\varkappa}$$

$$E = \varkappa_1^2 K-\varkappa\varkappa_1^2\frac{dK}{d\varkappa}$$

---

1) Es wird gewöhnlich $E' = \int_0^1\sqrt{\frac{1-\varkappa_1^2y^2}{1-y}}\,dy$ gesetzt.

2) Schlesinger, Handbuch . . . Bd. II, pg. 475; ib. pg. 366 ff.

welche Beziehungen man entweder durch Differentiation der Integrale für K und E nach $\varkappa$ oder durch die Methode der unbestimmten Koefficienten aus den Reiheu für K und E gewinnt, indem man

$$K = (c_0 + c_2\varkappa^2 + c_4\varkappa^4 + \cdots)E + (d_1\varkappa + d_3\varkappa^3 + \cdots)\frac{dE}{d\varkappa}$$
$$E = (c_0 + c_2\varkappa^2 + c_4\varkappa^4 + \cdots)K + (d_1\varkappa + d_3\varkappa^3 + \cdots)\frac{dK}{d\varkappa}$$

setzt. Man kann sich auch einer Methode bedienen, welche von den Differentialgleichungen 1) und 3) resp. von den daraus abgeleiteten Gauss'schen Differentialgleichungen ausgeht, und welche in allgemeiner Weise von Herrn Fuchs (Schlesinger Handbuch, Bd. II, pg. 455 ff.) angegeben wurde. Um $\frac{dK}{d\varkappa}$ und $\frac{dE}{d\varkappa}$ durch P Funktionen auszudrücken, differentiire man die Gleichungen 1) und 3) nach $\varkappa$, stelle Gleichungen für $\frac{du}{d\varkappa}$ resp. $\frac{dv}{d\varkappa}$ her und bringe sie auf die Normalform IIIa. Wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{dK}{d\varkappa} = \frac{\pi}{4}\varkappa P(3, 3, 5, 3; -1, 0; \varkappa) = \frac{\pi}{4}\varkappa F(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 2; \varkappa^2)$$
$$= \frac{\pi}{4}\varkappa\left\{1 + \frac{3^2}{2.4}\varkappa^2 + \frac{3^2.5^2}{2.4^2.6}\varkappa^4 + \frac{3^2.5^2.7^2}{2.4^2.6^2.8}\varkappa^6 + \cdots\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2}\frac{d}{d\varkappa}P(1, 1, 2, 1; -1, 0; \varkappa),$$
$$\frac{d^2K}{d\varkappa^2} = \frac{\pi}{4}P(3, 3, 5, 3; 1, 0; \varkappa) + (\tfrac{3}{4}\varkappa)^2\pi P(5, 5, 8, 5; -1, 0; \varkappa),$$
$$\frac{dE}{d\varkappa} = -\frac{\pi}{4}\varkappa P(1, 3, 4, 3; -1, 0; \varkappa) = -\frac{\pi}{4}\varkappa F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 2; \varkappa^2)$$
$$= -\frac{\pi}{4}\varkappa\left(1 + \frac{1.3}{2.4}\varkappa^2 + \frac{1.3^2.5}{2.4^2.6}\varkappa^4 + \cdots\right)$$
$$= +\frac{\pi}{2}\frac{d}{d\varkappa}P(-1, 1, 1, 1; -1, 0; \varkappa),$$
$$\frac{d^2E}{d\varkappa^2} = -\frac{\pi}{4}P(1, 3, 4, 3; -1, 0; \varkappa) - \frac{3}{4^2}\pi\varkappa^2 P(3, 5, 7, 5; -1, 0; \varkappa).$$

$\frac{d^2E}{d\varkappa^2}$ und $\frac{d^2E}{d\varkappa^2}$ können auch durch die für K und E gegebenen Differentialgleichungen ermittelt werden; in derselben Weise werden auch die höheren Ableitungen aus den Differentialgleichungen ermittelt und zwar können sie stets, wie man sieht, durch zwei P Funktionen, deren Argumente sich um bestimmte ganze Zahlen unterscheiden, mit in $\varkappa$ rationalen Koefficienten ausgedrückt werden.

§ 3. Bedingungen für das Auftreten rationaler Integrale.

Man kann diese Frage auf die nach dem Auftreten rationaler ganzer Functionen zurückführen, indem man die Substitution $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}u$ einführt, wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ die singulären Stellen der Differentialgleichung für die abhängige Variable y und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die negativen ganzen Exponenten der Integrale sind. Durch eine derartige Substitution wird eine Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen auf eine Differentialgleichung von der Form IIIa. übergeführt, wenn man eventuell noch für die unabhängige Variable x die Substitution $x-a_1 = (a_2-a_1)\xi$ macht, sodass man die singulären Stellen $0, 1, u, \infty$ erhält. Eine notwendige Bedingung für die Existenz rationaler ganzer Integrale ist nun, dass die determinirenden Fundamentalgleichungen für jede singuläre Stelle im Endlichen wenigstens je eine positive ganze Wurzel und für die singuläre Stelle im Unendlichen wenigstens eine negative ganze Wurzel habe. Da diese Bedingungen stets für die singulären Stellen $0, 1, u$ von IIIa. erfüllt sind, da für jede ein Exponent Null ist, so ist für IIIa. erforderlich, dass entweder α oder β eine negative ganze Zahl sei. Ferner ist erforderlich, dass irgend eins der für die singulären Stellen $0, 1, u$ aufgestellten Integrale keinen Logarithmus enthält, also in Reihenform darstellbar ist, und dass dies Integral mit dem Gliede x^n, wo $n = -\alpha$ eine positive ganze Zahl ist, abbricht, also eine ganze rationale Function vom Grade n ist. Diese Bedingungen sind auch notwendig, falls β keine ganze Zahl oder eine positive ganze Zahl ist. Es bricht dann natürlich auch das Integral für die unendlich ferne Stelle, welches zum Exponenten α gehört nach dem $n+1$ Gliede ab. Man verfährt daher folgendermassen, um zu untersuchen, ob IIIa. von einer ganzen rationalen Function befriedigt wird, vorausgesetzt, dass $\alpha = -n$ eine negative ganze Zahl ist:

I. Es sei β keine ganze Zahl oder eine positive ganze Zahl.

Man untersuche, ob eins der Integrale y_{01} oder y_{02} in Reihenform darstellbar ist, und wenn dies y_{01} ist, ob y_{01} nach dem $n+1$ Gliede abbricht. Falls $1-\gamma_1 < 0$ gehört zum Exponenten 0 sicher eine Reihe, falls $1-\gamma_1 > 0$ gehört zum Exponenten $1-\gamma_1$ sicher eine Reihe. Falls $1-\gamma_1 < 0$ gehört zum Exponenten $1-\gamma_1$ dann und nur dann eine Reihe,

wenn $\Delta^{(\gamma_1-1)}(1-\gamma_1) = 0$, falls $1-\gamma_1 > 0$ gehört zum Exponenten 0 dann und nur dann eine Reihe, wenn $\Delta^{(1-\gamma_1)}(0) = 0$ ist. Angenommen, es gehöre zu $y_{01} = P(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1; u, q; x)$ eine Reihe, so ist die Bedingung dafür aufzustellen, dass y_{01} nach dem $n+1$ Gliede abbricht. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass $\Delta^{(n+1)}(0) = 0$ ist. Es wird dann $\Delta^{(n+2)}(0)$ ebenfalls 0 und daher verschwinden sämmtliche Koefficienten $g_{n+\varkappa}$, $\varkappa \geqq 1$. Wenn $\Delta^{(n)}(0)$ oder wenn zwei auf einander folgende $\Delta^{(\nu)}(0)$ für $\nu \leqq n$ verschwinden, so kann y_{01} keine ganze Function n. Grades sein, sondern ist eine Function niederen Grades im letzten Falle. Da IIIa. aber nach den gemachten Voraussetzungen von keiner Function niederen Grades befriedigt werden kann, so ist das unmöglich. Wir können, was die Untersuchung von y_{02} anbetrifft, immer voraussetzen, dass $1-\gamma_1 \geqq 0$, wenn wir bei der anfangs erwähnten Substitution $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}u$ für $\alpha_\varkappa$ stets die kleinste negative Wurzel der betreffenden Fundamentalgleichung nehmen, falls dieselbe zwei negative ganze Wurzeln hat. Wenn also y_{01} keine ganze rationale Function n. Grades wäre, so bliebe zu untersuchen, ob

$$y_{02} = x^{1-\gamma_1} P(\alpha+1-\gamma_1, \beta+1-\gamma_1, \gamma+2(1-\gamma_1), 2-\gamma_1; u, q; x)$$

eine ganze rationale Function n. Grades wäre, da zu $1-\gamma_1 > 0$ sicher eine Reihe gehört. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn $\Delta^{(n+\gamma_1)}(0) = 0$ ist, wobei wir für α, β, γ, γ_1 resp. $\alpha+1-\gamma_1$, $\beta+1-\gamma_1$, $\gamma+2(1-\gamma_1)$, $2-\gamma_1$ setzen müssen. Wir können das kurz zusammenfassen in das Resultat: Unter der Voraussetzung, dass α eine negative ganze Zahl, β keine ganze oder eine positive ganze Zahl ist, wird IIIa. dann und nur dann von einer ganzen rationalen Function befriedigt, wenn $\Delta^{(-\alpha+1)}(0) = 0$ ist, worin eventuell, falls $1-\gamma_1$ eine positive ganze Zahl ist, für $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1$: $\alpha+1-\gamma_1$, $\beta+1-\gamma_1$, $\gamma+2(1-\gamma_1)$, $2-\gamma_1$ zu setzen ist. An Stelle von q tritt im letzten Falle

$$\frac{q\alpha\beta + (1-\gamma_1)\{\gamma-\gamma_1+(1-\gamma+\alpha+\beta)u\}}{(\alpha+1-\gamma_1)(\beta+1-\gamma_1)}.$$

II. Es sei β ebenfalls eine negative ganze Zahl.

Es kommt hierbei in Frage, ob $\Delta^{(-\alpha+1)}(0)$ oder $\Delta^{(-\beta+1)}(0)$, worin eventuell, falls $1-\gamma_1$ eine positive ganze Zahl ist, die erwähnten Veränderungen der Argumente vorzunehmen sind, verschwinden. Wenn

$\beta < \alpha$ ist und es verschwindet $\Delta^{(-\alpha+1)}(0)$, so verschwindet natürlich auch $\Delta^{(-\beta+1)}(0)$. Es könnte hier der Fall eintreten, dass y_{01} eine ganze rationale Function $-\alpha$., y_{02} eine solche $-\beta$. Grades wäre; es würden in diesem Falle sämtliche Integrale von IIIa. ganze rationale Functionen sein. Es müssten in diesem Falle sämtliche Wurzeln der verschiedenen Fundamentalgleichungen ganze positive, im Unendlichen ganze negative Zahlen sein und es müsste jedes Integral in Reihenform darstellbar sein. Diese Bedingungen würden aber auch hinreichend nach dem Satze der Functionentheorie sein, dass eine Function, die überall den Charakter einer rationalen Function hat, eine rationale Function ist. Wir hätten für den Fall, dass alle Integrale ganze rationale Functionen sind, zunächst die Bedingung, dass 7 der Wurzeln ganze Zahlen sind; die 8. Wurzel ergiebt sich dann ebenfalls als eine ganze Zahl, da die Summe der Wurzeln 2 ist; dazu würden noch 4 Bedingungen für die Existenz von Reihen kommen; wir erhielten also im ganzen 8 Bedingungen, da 3 der Wurzeln immer Null sind. Für den Fall, dass überhaupt ein Integral ein ganzes rationales ist, erhalten wir 4 Bedingungen; für den Fall, dass nur ein Integral ein ganzes rationales ist, erhalten wir zwischen 4 und 8 Bedingungen, die aus dem Vorhergehenden sich leicht ergeben.

§ 4. Anwendung auf die Lamé'sche Differentialgleichung.

Die Lamé'sche Differentialgleichung hat bekanntlich die Form

1) $$y^{(2)} - [n(n+1)\varkappa^2 sn^2 h]y = 0.$$

Dieselbe lässt sich durch die Transformation

$$z = sn^2 x = u^2; \frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}$$

auf folgende Form bringen:

2) $$y^{(2)} + \left\{ \frac{1}{2z} + \frac{1}{(2z-1)} + \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{\varkappa^2}\right)} \right\} y' - \frac{\frac{n(n+1)}{4} z + \frac{h}{4\varkappa^2}}{z(z-1)\left(z-\frac{1}{\varkappa^2}\right)} y = 0$$

welche ein specieller Fall unserer Differentialgleichung IIIa. ist und aus derselben hervorgeht, wenn man

$$\alpha = -\frac{n}{2}, \quad \beta = \frac{n+1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2}, \quad u = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad q = \frac{-h}{n(n+1)\varkappa^2}$$

setzt. Es gehören also die ein Fundamentalsystem bildenden Integrale

für die singulären Stellen $0, 1, \frac{1}{\varkappa^2}, \infty$ resp. zu den Exponenten: $0, \frac{1}{2}$; $0, \frac{1}{2}$; $0, \frac{1}{2}$; $-\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$. Die Summe der Exponenten ist wie erforderlich 2. Für den Fall $n = 0$ resp. $n = -1$ erhalten wir die trivialen Lösungen $e^{+\sqrt{h}x}$ und $e^{-\sqrt{h}x}$, welche ein Fundamentalsystem bilden. Man sieht aus den Exponenten der Fundamentalgleichungen von 2) ohne weiteres, dass ihre Integrale logarithmenfrei sind, sodass auch die von 1) keine Logarithmen enthalten. Aus 1) würde das nicht sofort hervorgehen, denn die einzigen singulären Stellen von 1) sind die Unendlichkeitsstellen von snx d. h. die Stellen $\xi = K'i + \lambda 2K + \mu 2K'i$, für welche die determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$r(r-1) - n(n+1) = 0,$$

deren Wurzeln $-n$ und $n+1$ ganzzahlig differiren, falls n wie gewöhnlich als ganzzahlig angenommen wird. Es bedarf also hier noch einer weiteren Ueberlegung, um zu beweisen, dass zu der algebraisch kleinsten der beiden Wurzeln $-n$ und $n+1$ in der That ein logarithmen freies Integral gehört. Daraus folgt, dass jedes Integral von 1) in der ganzen Ebene eindeutig ist. Hieraus schliesst man, dass das allgemeine Integral von 1) die Form hat[1]): $CF(x) + C'F(-x)$, wo $F(x)$ eine doppelt periodische Function zweiter Art ist. Um die analytische Darstellung von $F(x)$ zu erhalten, verfahre man folgendermassen. Die beiden ein Fundamentalsystem bildenden Integrale von 2) sind in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ nach B. 6) und 7)

$$y_{\infty 1} = z^{\frac{n}{2}} P\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}, 1-n, -n+\frac{1}{2}; \varkappa^2, q'; \frac{1}{z}\right)$$

$$y_{\infty 2} = z^{-\frac{n+1}{2}} P\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, n+2, \frac{n+3}{2}; \varkappa^2, q''; \frac{1}{z}\right)$$

wo

$$q' = \frac{(1+\varkappa^2)n^2 - qn(n+1)\varkappa^2}{n(n-1)} = \frac{(1+\varkappa^2)n + h}{n(n-1)}$$

$$q'' = \frac{-(1+\varkappa^2)(n+1) + h}{(n+1)(n+2)}$$

ist. Wie man sieht, geht das zweite Integral aus dem ersten hervor, wenn man n mit $-(n+1)$ vertauscht, sodass wir uns auf die Betrach-

1) Hermite: Sur quelques applications des fonctions elliptiques, pg. 2 und pg. 76.

tung des ersten beschränken können. Wir setzen nunmehr in die Formel für $y_{\infty 1}$ $z = sn^2 x$ ein:

$$y_{\infty 1} = (sn^2 x)^{\frac{n}{2}} P\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}, 1-n, -n+\frac{1}{2}; \varkappa^2, \frac{(1+\varkappa^2)n+h}{n(n-1)}; \frac{1}{sn^2 x}\right).$$

Setzen wir in dieses Integral, das nur in der Umgebung der Stellen $x = K'i + 2\lambda K + 2\mu K'i$ gilt, $x = K'i + \varepsilon$ und daher

$$sn^2 x = \frac{\varkappa^2 sn^2 \varepsilon}{1} = \frac{1}{\varkappa^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1 \varepsilon^2 + \cdots + s_i \varepsilon^{2i} + \cdots\right\}$$

wo die Werte für die ersten Koefficienten

$$s_0 = \frac{1+\varkappa^2}{3}$$

$$s_1 = \frac{1-\varkappa^2+\varkappa^4}{15}$$

$$s_2 = \frac{2-3\varkappa^2-3\varkappa^4+2\varkappa^6}{189}$$

$$s_3 = \frac{2(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^2}{675}$$

sind, so erhält man mit Weglassung der Constanten

$$\begin{aligned} y_{\infty 1} &= \left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + \mathfrak{P}(\varepsilon^2)\right\}^{\frac{n}{2}} P\left(\cdots \frac{\varkappa^2}{\frac{1}{\varepsilon^2} + \mathfrak{P}(s^2)}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + \mathfrak{P}(\varepsilon^2)\right\}^{\frac{n}{2}} \left\{1 + \frac{(1+\varkappa^2)n^2+h}{2(1-2n)}\varepsilon^2 + \cdots\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{n}{2}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}(s_0 + s_1\varepsilon^2 + \cdots) + \cdots\right\}\left\{1 + \frac{(1+\varkappa^2)n^2+h}{2(1-2n)}\varepsilon^2 + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h+n(n+1)s_0}{1(1-2n)}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} + \cdots \end{aligned}$$

Dies ist dieselbe Reihe, welche Hermite l. c. pg. 120 aufgestellt hat und von welcher er nachweist, dass dieselbe eine doppelt periodische Function zweiter Art ist. Dieselbe kann mithin, wie wir gesehen haben durch unsere P-Function ausgedrückt werden. Natürlich gilt die ganze Entwicklung nur für den Fall, dass n eine positive ganze Zahl ist, wenn n eine negative ganze Zahl ist, kann $y_{\infty 1}$ unmöglich eine doppelt periodische Function sein. In diesem Falle ist aber $-(n+1)$ positiv und daher können wir die Entwicklung von $y_{\infty 2}$ hier anwenden. Dieselbe entsteht, wie schon erwähnt, aus $y_{\infty 1}$, wenn man n mit $-(n+1)$

vertauscht. Wir haben mithin das Ergebnis: Je nachdem u eine positive oder eine negative ganze Zahl ist, erhalten wir für 1) die Lösung:

$$y_{\infty 1} = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h + n(n+1)s_0}{2(1-2n)} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} + \cdots$$

resp.

$$y_{\infty 2} = \frac{1}{\varepsilon^{n_1-1}} + \frac{h + n_1(n_1-1)}{2(3-2n_1)} \frac{1}{\varepsilon^{n_1-3}} + \cdots,$$

wenn wir für negatives n dasselbe gleich $-n_1$ setzen. In jedem Falle aber ist die Lösung eine doppelt periodische Function zweiter Art. Ich erwähne dies Ergebnis hier, weil Hermite nur den Fall, wo n eine positive ganze Zahl ist, in Betracht gezogen hat, und weil diese beiden Fälle streng auseinander zu halten sind.

Wir wollen nunmehr den Fall untersuchen, dass 1) durch eine ganze rationale Funktion n. Grades in Bezug auf snx befriedigt wird, das heisst, dass 2) durch eine ganze rationale Funktion n. Grades in Bezug auf $z^{\frac{1}{2}}$ befriedigt wird. Wenn eine solche Lösung vorhanden ist, so kann sie nur die Form haben: $cy_{01} + dy_{02}$, wo c und d Constanten sind und y_{01} und y_{02} zu den Exponenten 0 und $\frac{1}{2}$ gehören. Es muss daher entweder c oder d Null werden, da nicht beide Reihen abbrechen können, denn wir haben nur einen negativen Exponenten im Unendlichen. Es muss daher entweder d oder c Null werden, und die Function hat entweder die Gestalt $c\sum_0^{\frac{n}{2}} {}_\nu p_\nu z^\nu$ oder die Gestalt $dz^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_\nu q_\nu z^\nu$. Das erste tritt ein, wenn n eine grade Zahl, das letzte, wenn n eine ungrade Zahl ist. Es sei zunächst n eine grade Zahl, so ist die Bedingung dafür, dass 2) durch eine ganze rationale Function $\frac{n}{2}$. Grades in Bezug auf z befriedigt werde, dass

$$\Delta^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}(0) = 0$$

ist; wenn indessen n eine ungrade Zahl ist, so muss 2) durch eine ganze rationale Function von der Form $dz^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_\nu q_\nu z^\nu$ befriedigt werden, und dazu ist nach unseren früheren Kriterien pg. 33 ff. erforderlich, dass

$$\Delta^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(0) = 0$$

ist, wenn für $\alpha, \beta, \ldots$ die Substitutionen $\alpha+1-\gamma_1$, $\beta+1-\gamma_1 \ldots$ gemacht werden. Die erste Determinante ist eine Function von α, β, γ, δ, u, q, die zweite von

$$\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1,\ u,\ \frac{q\alpha\beta+(1-\gamma_1)\{\gamma-\gamma_1+(1-\gamma+\alpha+\beta)u\}}{(\alpha+1-\gamma_1)(\beta+1-\gamma_1)};$$

dieselben werden aus der Reihe für $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta; u, q; x)$ gebildet, indem man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, u, q$ die Werte

$$-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{-h}{n(n+1)\varkappa^2}$$

einsetzt. Wir haben mithin das Ergebnis: Wenn n eine grade Zahl ist, so kann die verlangte ganze rationale Function von sux nur grade Potenzen von snx enthalten, und es giebt im allgemeinen $\frac{n}{2}+1$ Werte für h; wenn n indessen eine ungrade Zahl ist, so kann die verlangte ganze rationale Function nur ungrade Potenzen von snx enthalten, und es giebt im allgemeinen $\frac{n+1}{2}$ Werte für h.

Schliesslich wollen wir noch untersuchen, wie viele Lamé'sche Functionen erster Art 1) besitzt, das heisst, wie viele Functionen, die ganz und vom Grade n in Bezug auf $snx = z^{\frac{1}{2}}$, $cnx = \sqrt{1-z^2}$, $dnx = \sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$ sind. Diese Frage ist mit Hilfe des Vorhergehenden rasch zu erledigen. Es sei zunächst n eine grade Zahl, so wissen wir, dass es $\frac{n}{2}+1$ ganze rationale Function von $z^{\frac{1}{2}}$ giebt, und zwar enthalten diese Functionen nur grade Potenzen von $z^{\frac{1}{2}}$.

Um die Anzahl der anderen Functionen zu bestimmen, betrachten wir die Integrale 1) bis 8) unter C. Die beiden Integrale 1) und 2) kommen nicht mehr in Frage; 3) kann keine Function $\frac{n}{2}$. Grades sein, da $\frac{n-1}{2}$ keine ganze Zahl sein würde, dasselbe gilt von 5) und 8). Wohl aber können 4), 6), 7) ganze Functionen $\frac{n}{2}$. Grades sein. Es ist indessen notwendig, dass die Reihen

$$P(1-\gamma_1+\gamma-\beta,\ 1-\gamma_1+\gamma-\alpha,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$
$$P(2-\gamma+\alpha,\ 2-\gamma+\beta,\ 4-\gamma,\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$
$$P(1+\gamma_1-\beta,\ 1+\gamma_1-\alpha,\ \gamma+2(1-\gamma+\gamma_1),\ \gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$

— wo die q aus der Formel für r unter A. IV durch das ursprüngliche q von IIIa. auf Grund der Bedingung berechnet werden, dass r bei den

Vertauschungen unverändert bleibt — nach dem $\frac{n}{2}-1$ Gliede abbrechen. Es müssen also 3 Determinanten von der Form $\Delta^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0)$ verschwinden. Wir erhalten also für jede dieser P-Functionen im allgemeinen $\frac{n}{2}$ verschiedene Werte für h, so dass wir im ganzen $\frac{n}{2}+1+3\frac{n}{2}=2n+1$ Werte für h erhalten, welche der Bedingung genügen, dass für dieselben ein Integral von 2) eine Lamé'sche Function erster Art ist. Die diesen entsprechenden zum Exponenten $\frac{n+1}{2}$ gehörigen, in der Umgebung der Unendlichkeitsstelle giltigen Integrale sind Lamé'sche Functionen zweiter Art; dieselben verschwinden für $z=\infty$ und sind nach Heine (Handbuch Bd. I pg. 386) elliptische Integrale erster und zweiter Art. Ist n indessen eine ungrade Zahl, so kommen die Integrale 2), 3), 5), 8) also die Reihen

$$P(\alpha+1-\gamma_1,\ \beta+1-\gamma_1,\ \gamma+2(1-\gamma_1),\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$
$$P(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma,\ \gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$
$$P(1-\gamma+\gamma_1+\alpha,\ 1-\gamma+\gamma_1+\beta,\ \gamma+2(1-\gamma+\gamma_1),\ \gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$
$$P(2-\alpha,\ 2-\beta,\ 4-\gamma,\ 2-\gamma_1;\ u,\ q;\ x)$$

in Betracht. Es müssen dann 3 Determinanten von der Form $\Delta^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(0)$ und eine Determinante von der Form $\Delta^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(0)$ verschwinden. Wir erhalten also im ganzen $3\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}=2n+1$ Bedingungen für h. Wir erhalten somit das Schlussergebnis: Die Anzahl der der Differentialgleichung 2) genügenden Lamé'schen Functionen erster Art ist für ein beliebiges, ganzes positives n gleich $2n+1$.

Die eben untersuchten Lamé'schen Functionen nennt man gewöhnlich Lamé'sche Functionen 2. Ordnung. Wenn $u=1$ oder $u=0$ wird, gehen dieselben in hypergeometrische Functionen oder in Kugelfunctionen über, wie wir aus unserer Differentialgleichung sofort erkennen. Die eben angewandte Methode kann man dazu benutzen, um die Anzahl der Lamé'schen Functionen höherer Ordnung allgemein zu bestimmen; dieselbe ist von der von Heine (Handbuch Bd. I § 137) angewandten verschieden.

Vita.

Natus sum, Augustus Carolus Franz, in vico Nicolausberg prope Gottingam d. XXII Aprilis a. h. s. LXVIII, patre Henrico, matre Julia e gente Schlote quos parentes adhuc superstites veneror. Fidei adscriptus sum evangelicae. Gymnasium reale Bernburgiense, quod dicitur Carolinum, frequentavi. Ibidem auspiciis ill. directoris Johannis Hutt maturitatis testimonio vere a. h. s. LXXXVIII accepto in universitate Gottingensi, in schola polytechnica Hannoverana, in universitate Berolinensi per sedecim semestria studiis praecipue mathematicis, physicis, philosophicis operam dedi. Seminarii mathematici Berolinensis per quattuor semestria sodalis fui. Anno h. s. XCVII examen pro facultate docendi superavi. Docuerunt me viri illustrissimi: Ebbinghaus, Frobenius, Fuchs, de Gizycki (†), Glan, de Helmholtz (†), Hensel, Knoblauch, Kronecker (†), Planck, H. A. Schwarz, Stumpf. Quibus viris omnibus, imprimis professoribus Fuchs, Schwarz, Frobenius gratias ago quam maximas.

Göttingen, Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.